



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES Y DE  
TELECOMUNICACIÓN

Titulación :

INGENIERO INDUSTRIAL

Título del proyecto:

MODELIZACIÓN Y SIMULACIÓN DE UN VEHÍCULO AÉREO NO  
TRIPULADO

Miguel Ángel Sánchez Yoldi

Fernando José Ruiz Tadeo

Pamplona, 18 de Abril de 2011



# ÍNDICE

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. INTRODUCCIÓN.....</b>                                  | <b>6</b>  |
| <b>2. ANTECEDENTES Y OBJETIVOS.....</b>                      | <b>7</b>  |
| <b>2.1 Vehículos aéreos no tripulados (UAV).....</b>         | <b>7</b>  |
| 2.1.1 Introducción.....                                      | 7         |
| 2.1.2 Evolución histórica.....                               | 7         |
| 2.1.3 Clasificación.....                                     | 8         |
| 2.1.4 Aplicaciones actuales.....                             | 8         |
| <b>2.2 El quadrotor.....</b>                                 | <b>9</b>  |
| 2.2.1 Introducción.....                                      | 9         |
| 2.2.2 Evolución histórica.....                               | 10        |
| 2.2.3 Aplicaciones actuales.....                             | 12        |
| <b>2.3 Objetivos.....</b>                                    | <b>15</b> |
| <b>3. RECOPIACIÓN Y PRESENTACIÓN DE DATOS.....</b>           | <b>16</b> |
| 3.1 Funcionamiento general de un quadrotor.....              | 16        |
| 3.2 Consideraciones para el modelo del rotor.....            | 21        |
| 3.3 Consideraciones para el modelo del quadrotor.....        | 22        |
| 3.4 Consideraciones para el modelo dinámico.....             | 24        |
| 3.5 Consideraciones para la simulación en tiempo real.....   | 26        |
| <b>4. DESARROLLO DEL TRABAJO.....</b>                        | <b>28</b> |
| 4.1 Introducción.....  | 28        |
| 4.2 Modelo del rotor.....                                    | 28        |
| 4.2.1 Procedimiento.....                                     | 28        |
| 4.2.2 Hipótesis del rotor y características geométricas..... | 30        |
| 4.2.3 Estudio del vuelo axial.....                           | 38        |
| 4.2.4 Estudio del vuelo de avance.....                       | 42        |
| 4.2.5 Implementación del modelo.....                         | 48        |
| 4.3 Modelo del quadrotor .....                               | 53        |
| 4.3.1 Planteamiento del problema.....                        | 53        |
| 4.3.2 Estudio de la estructura: caja central y brazos.....   | 55        |
| 4.3.3 Estudio de la caja de componentes electrónicos.....    | 61        |
| 4.3.4 Estudio de los motores.....                            | 62        |
| 4.3.5 Estudio de la batería.....                             | 69        |

|  |            |
|--|------------|
| 4.3.6 Estudio de las palas que forman el rotor.....  | 74         |
| 4.3.7 Estudio de una carga adicional.....  | 76         |
| 4.3.8 Determinación final de las constantes del quadrotor .....  | 78         |
| 4.3.9 Resumen de la modelización del quadrotor .....   | 81         |
| <b>4.4 Modelo dinámico.....</b>  | <b>82</b>  |
| 4.4.1 Introducción y planteamiento del modelo.....   | 82         |
| 4.4.2 Definición de las variables de entrada y salida del modelo.....  | 85         |
| 4.4.3 Cálculo de las variables de entrada de las Cartas de navegación.....   | 88         |
| 4.4.4 Cálculo de las fuerzas y momentos.....   | 89         |
| 4.4.5 Modelo de los motores.....   | 101        |
| 4.4.6 Modelo de la batería.....  | 103        |
| 4.4.7 Estudio de estabilidad.....  | 104        |
| 4.4.8 Modelo de control para el vuelo de avance.....   | 106        |
| 4.4.9 Interacción con el suelo: Corrección del modelo dinámico.....  | 110        |
| 4.4.10 Estructura del modelo dinámico en Matlab/Simulink.....  | 115        |
| <b>4.5 Simulación en tiempo real.....</b>  | <b>118</b> |
| 4.5.1 Implementación del concepto de tiempo real.....  | 118        |
| 4.5.2 Lectura de datos a través del joystick.....  | 122        |
| 4.5.3 Conexión de Matlab y LabVIEW.....  | 126        |
| 4.5.4 Diseño de las ventanas de visualización y del panel de control.....  | 126        |
| <b>5. ANÁLISIS DE RESULTADOS.....</b>  | <b>131</b> |
| <b>5.1 Características del quadrotor objeto del análisis.....</b>  | <b>131</b> |
| 5.1.1 Modelo del rotor.....  | 131        |
| 5.1.2 Modelo del quadrotor .....   | 132        |
| <b>5.2 Análisis de la distribución de velocidad inducida y ángulo de ataque para la distribución óptima de alabeo.....</b> | <b>132</b> |
| <b>5.3 Análisis de la situación en pérdidas de las Cartas de navegación.....</b>   | <b>136</b> |
| <b>5.4 Análisis de la estabilidad del sistema.....</b>   | <b>138</b> |
| <b>5.5 Análisis de la situación de contacto con el suelo.....</b>  | <b>143</b> |
| <b>5.6 Análisis de la medida de tiempos para la simulación en tiempo real.....</b>   | <b>145</b> |
| <b>6. CONCLUSIONES.....</b>  | <b>147</b> |
| <b>7. MANUAL DE USUARIO.....</b>   | <b>150</b> |
| <b>8. MANUAL DE PROGRAMADOR.....</b>   | <b>172</b> |
| <b>9. BIBLIOGRAFÍA.....</b>  | <b>173</b> |
| <b>10. ANEXOS.....</b>   | <b>175</b> |
| <b>ANEXO A: Cálculos aerodinámicos.....</b>  | <b>175</b> |



|   |            |
|---|------------|
| A.1 Teoría de la cantidad de movimiento.....                    | 175        |
| A.2 Teoría del elemento de pala.....                            | 177        |
| <b>ANEXO B: Cálculo de momentos de inercia.....</b>             | <b>184</b> |
| <b>ANEXO C: Matriz de cambio de base y modelo dinámico.....</b> | <b>188</b> |

# 1. INTRODUCCIÓN

El presente proyecto final de carrera, desarrollado bajo el auspicio de *Engineea Remote Technologies*, consiste en el desarrollo de un simulador de vuelo de un vehículo aéreo no tripulado (UAV)<sup>1</sup>. En particular, se trata de un vehículo de cuatro rotores o cuadricóptero, habitualmente designado por su nombre en inglés: quadrotor.

El trabajo desarrollado consta de cuatro etapas fundamentales:

- El estudio y la modelización aerodinámica.
- La modelización de las distintas partes del quadrotor.
- El establecimiento de un modelo dinámico que se asemeje a la realidad.
- La simulación en tiempo real del modelo establecido.

En las dos primeras partes, la modelización aerodinámica y como sólido rígido, no se ha pretendido estudiar cuáles son los parámetros que hacen óptimo el diseño estrictamente. Más bien se presenta un modelo del quadrotor configurable a través de una serie de campos que debe introducir el usuario del simulador a través del software de modelización.

La tercera etapa es el puente que une el modelo establecido con la simulación en tiempo real. Las ecuaciones del modelo dinámico deben representar fielmente el vuelo del quadrotor. La optimización de esta parte del código de programación resulta esencial. La simulación en tiempo real exige que el tiempo de cálculo y representación gráfica no sean elevados.

La mayor parte de los trabajos y estudios desarrollados relativos al quadrotor ponen especial énfasis en la aplicación de diversos sistemas de control así como en la implementación de componentes electrónicos y sensores. No es esta la finalidad de este proyecto. Sino que se pretende enfocar el estudio del quadrotor desde el punto de vista de la realización de un software de modelización aerodinámica de los rotores y del propio quadrotor, para finalmente desarrollar un simulador de vuelo en tiempo real.

---

<sup>1</sup> UAV: Siglas en inglés del término Unmanned Air Vehicle

## 2. ANTECEDENTES Y OBJETIVOS

### 2.1 Vehículos aéreos no tripulados (UAV)

#### 2.1.1 Introducción

Los UAV son aeronaves no tripuladas utilizadas en el campo militar y civil para aplicaciones destinadas a la vigilancia o la seguridad principalmente. Para ello se integran con cámaras que permiten observar desde las alturas, sustituyendo así al ojo humano. De esta manera, entre las ventajas que se les atribuyen respecto a las aeronaves tripuladas es que tienen una mayor capacidad de maniobra y son más duraderas ya que sus dimensiones son más reducidas. Además tienen un menor coste.

#### 2.1.2 Evolución histórica

Como ocurre en muchas disciplinas del desarrollo tecnológico, no existe consenso a la hora de fijar la aparición de los UAV. El origen de estas máquinas se remonta a mediados del siglo XIX, cuando el 22 de agosto de 1849 un primitivo UAV formado por un globo cargado de bombas se utilizó en el ataque austriaco a la ciudad de Venecia.

Durante la guerra de secesión americana (1861-1865) también fueron utilizados por ambos bandos, al igual que en Venecia, en forma de globos cargados. Sin embargo, no tuvieron mucho éxito ya que la fiabilidad y exactitud de movimientos de los UAV era pequeña.

Pero fue a partir de la Primera y la Segunda Guerra Mundial cuando comenzó decididamente el desarrollo de los UAV para aplicaciones militares. Así, los tiradores británicos antiaéreos fueron entrenados con aviones radiocontrolados.

En esta época EEUU creó un prototipo de UAV llamado *Operación Afrodita*. Eran aviones B-17 cargados de explosivos y con control remoto que se estrellaban contra objetivos estratégicos.

Posteriormente, durante la Guerra Fría, EEUU desarrolló UAV para espionaje y reconocimiento. Al primero de ellos se le designó como *Firebee* y fue utilizado sobre la República Comunista de China.

En la Guerra de Vietnam los UAV contaban ya con reconocimiento de cámaras de día. Más tarde se mejoraron con cámaras de fotos nocturnas, así como con avances en comunicación y electrónica.

En los conflictos del Golfo Pérsico y Bosnia los UAV consolidaron su empleo como aplicación militar. Prueba de ello fue el *Predator*, capaz de volar 700 Km con una autonomía de vuelo de 24 horas.

En los últimos años ha habido un avance muy importante en cuanto a las aplicaciones civiles de los vehículos aéreos no tripulados. Cada vez son más los proyectos de

investigación y las empresas que muestran interés en esta disciplina.

### 2.1.3 Clasificación

La forma más básica de clasificar los vehículos aéreos no tripulados es de acuerdo a su peso. Las distintas categorías son las siguientes:

- Micro: Menos de un 1 Kg.
- Mini: 1 – 10 Kg.
- Pequeño: 10 – 50 Kg.
- Mediano: 50 – 100 Kg.
- Grande: Más de 100 Kg.

También se puede establecer una clasificación según el sistema de propulsión. Las distintas categorías son:

- Motores de hélice: Gasolina, diesel y otros derivados.
- Turbina de gas comprimido.
- Motores eléctricos: Baterías precargadas o energía solar.
- Motores de Hidrógeno.

Habitualmente es posible diferenciar dos grupos en función del despegue del UAV, pudiendo ser este vertical como el de los helicópteros, o no vertical como el del parapente. La Figura 2.1 muestra una clasificación en función de este criterio.

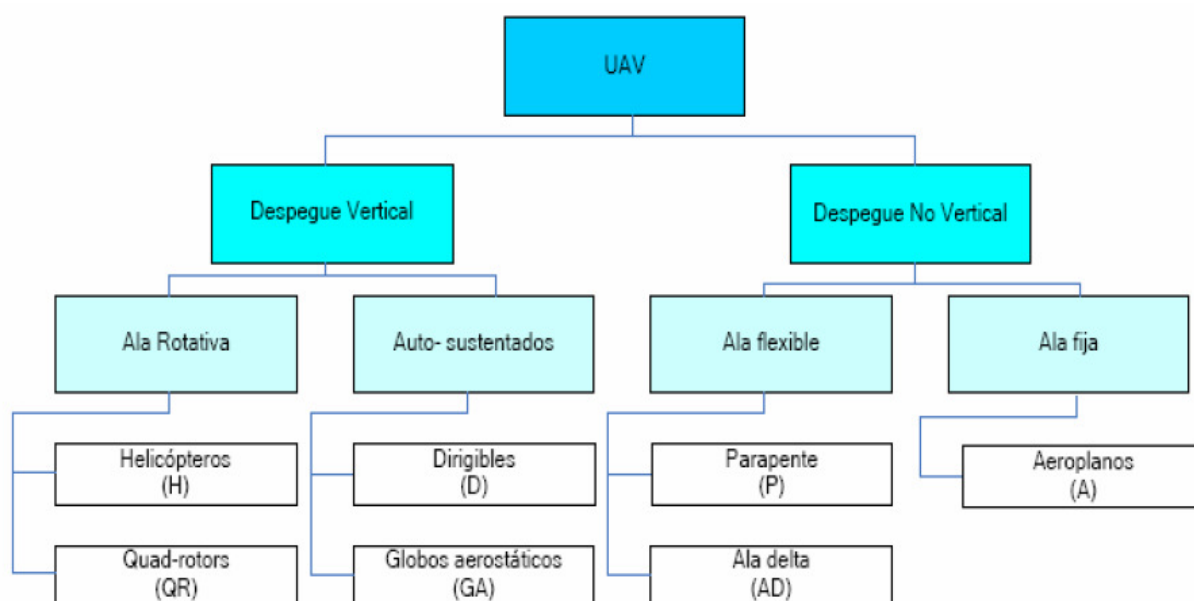


Figura 2.1

### 2.1.4 Aplicaciones actuales

Existen una gran cantidad de aplicaciones para los UAV. Algunas de ellas son las siguientes.

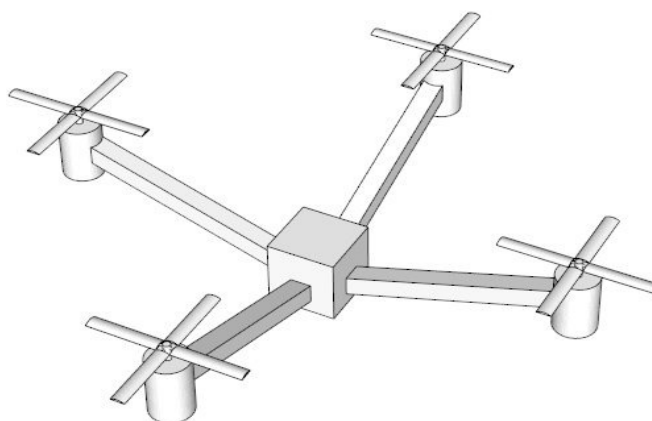
- Aplicaciones en el campo militar: Los UAV se utilizan fundamentalmente en labores de espionaje. Los tamaños utilizados pueden variar mucho, aunque habitualmente los más empleados son aquellos que poseen reducidas dimensiones, lo que les permite no ser detectados por los radares. El desarrollo de estos vehículos para labores militares permite, además, reducir de forma drástica el riesgo que supone emplear vehículos tripulados que ponen en peligro la vida de quienes los ocupan.
- Supervisión: La capacidad de maniobra que presentan la mayor parte de los UAV los hace especialmente útiles para las labores de supervisión de edificios y obras civiles. Los vehículos son dotados de cámaras de vídeo que permiten ahorrar tiempo y dinero en el montaje de cualquier otro tipo de estructura que sirviese de plataforma para la observación y la vigilancia. El control del tráfico aéreo y terrestre se realiza en ocasiones con UAV.
- Fotografía aérea: Cuando se pretende obtener información del terreno a través de fotografía aérea, o grabación de vídeo, el empleo de UAV supone una solución barata y cada vez más empleada. La detección de recursos marinos y de artillería sin detonar son otros ejemplos interesantes.
- Vigilancia: Llevada a cabo por la policía u otros grupos privados de seguridad en zonas concretas. El 10 % de los cultivos de EEUU están siendo monitorizados por los UAV en terrenos de gran extensión. También se emplean para vigilancia de zonas costeras.
- Reconocimiento de accidentes y desastres: Los UAV pueden ser utilizados para el reconocimiento de zonas que han sufrido explosiones nucleares o desastres naturales. También para la valoración aérea de accidentes de carretera.
- Agricultura: En ocasiones se equipan los UAV con pesticidas y fertilizantes que son pulverizados durante el vuelo.

## 2.2 El quadrotor

### 2.2.1 Introducción

El quadrotor es una aeronave que se eleva y se desplaza por la acción de cuatro rotores instalados en los extremos de una estructura en forma de cruz.

De los cuatro rotores, dos giran en sentido horario, y los otros dos en sentido antihorario. Esta configuración permite al helicóptero realizar cualquier maniobra (vuelo de hover, axial, autorrotación y de avance) tal y como se explicará posteriormente.

**Figura 2.2**

Tradicionalmente, las ventajas que se atribuyen a los modelos quadrotor son la simplicidad mecánica del vehículo, que se puede observar en la Figura 2.2. El control del movimiento se realiza a través del accionamiento directo de los rotores variando sus velocidades. En los helicópteros convencionales, la velocidad de giro de las hélices suele ser constante y el control del movimiento se realiza mediante la variación de los ángulos de ataque de las palas (cíclico y colectivo). Esto requiere elementos mecánicos de precisión que no son necesarios en el quadrotor.

Otra ventaja es el empleo de motores eléctricos en lugar de motores de combustión. Especialmente interesante es la aplicación del quadrotor para el vuelo en el interior de edificios ya que no se contamina el aire con los residuos de la combustión. Sin embargo, la utilización de motores eléctricos limita el tiempo de funcionamiento, ya que las baterías que alimentan los motores no aportan autonomía superior a los 15 o 20 minutos.

La alta maniobrabilidad y el aumento de carga son otras de las características del quadrotor que lo hacen atractivo.

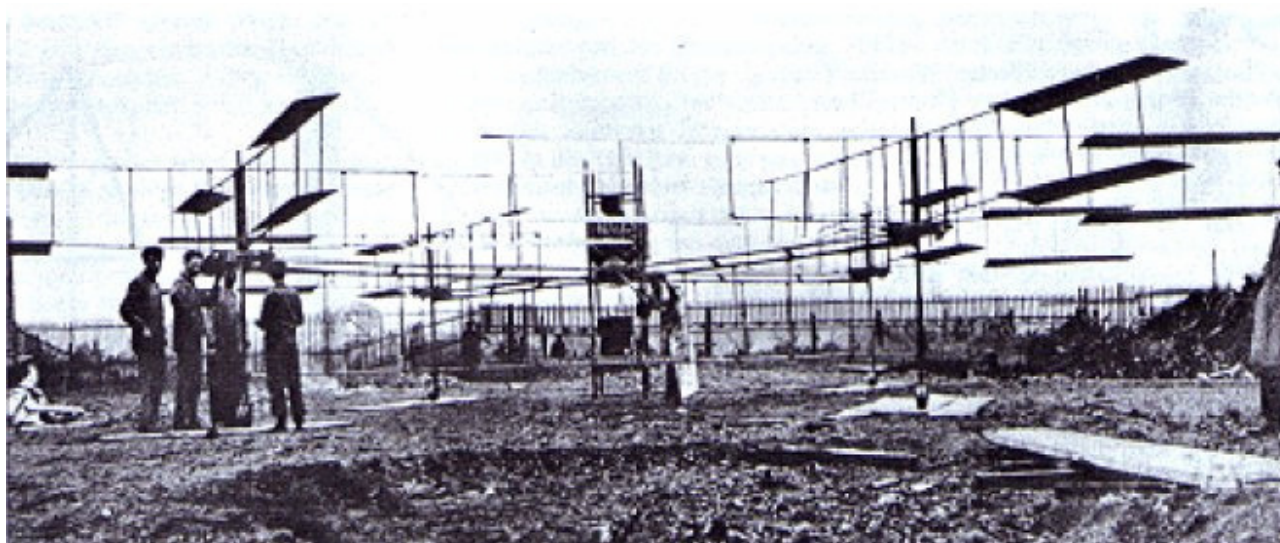
Como gran desventaja se suele citar la dificultad de establecer un sistema de control, especialmente para aquellos quadrotors de dimensiones reducidas. Esto se debe al hecho de que las fuerzas y pares necesarios para controlar el sistema son conseguidos no sólo a través de efectos aerodinámicos, sino también a través del acoplamiento de la dinámica de los cuatro rotores.

### **2.2.2 Evolución histórica**

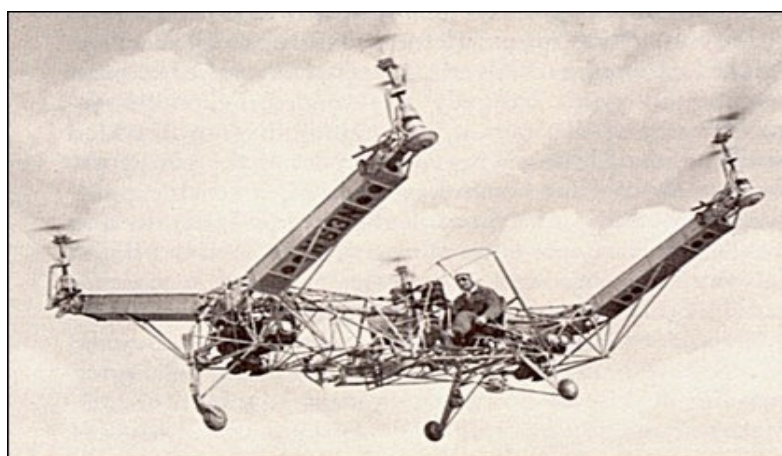
El primer quadrotor de la historia fue creado por el científico francés Charles Richet a comienzos del siglo XX, quien creó un pequeño modelo que no consiguió volar. Pero fue un alumno de Richet, Louis Breguét, el primero en construir un quadrotor pilotado.

Dicho vehículo constaba de un motor Antoinette de 8 cilindros de 40 HP que movía cuatro rotores, cada uno de ellos de cuatro palas. Para mover las hélices se usaba un simple sistema de poleas. La estructura estaba hecha de tubos de acero para soportar el peso de todo el conjunto. El primer vuelo, llevado a cabo en Douai (Francia), se realizó en 1907 y no consiguió elevarse más de un metro y medio del suelo.



**Figura 2.3**

Posteriormente, en 1956, se diseñó un prototipo para uso militar y civil llamado *Convertawings Model A*. El helicóptero lograba controlar la fuerza de empuje que aportaba cada uno de los rotores y su vuelo tuvo éxito, incluso para el régimen de avance.

**Figura 2.4**

A finales de los años 90, Bell y Boeing trabajaron conjuntamente en el desarrollo de un quadrotor tripulado llamado *Quad Tiltrotor*. Este vehículo tenía dos modalidades de funcionamiento. Por un lado, permitía el despegue vertical con los rotores paralelos al suelo (modo helicóptero), y por otro, permitía realizar el vuelo de avance como avión modificando la dirección de los cuatro rotores. La Figura 2.5 ilustra las dos modalidades de vuelo.

**Figura 2.5**

### 2.2.3 Aplicaciones actuales

En los últimos años, se ha producido un rápido incremento en el desarrollo de prototipos quadrotor. La mayoría pertenecen a la categoría de mini UAV (peso menor de 10 Kg).

Algunos de ellos se utilizan como juguetes manejados por radiocontrol. Otros prototipos más complejos han comenzado a emplearse en el campo civil y militar, posicionando al quadrotor como uno de los modelos de mayor desarrollo en el campo de los UAV. Prueba de ello ha sido la reciente adquisición de la policía canadiense de UAV del tipo quadrotor para realizar labores de vigilancia, principalmente por la capacidad que tienen estos vehículos de alcanzar espacios de difícil acceso.

La empresa Draganfly desarrolla en la actualidad varios modelos quadrotor (así como otros modelos de seis y ocho rotores) de reducido peso (entre 1 y 2 Kg) que incorporan cámaras de vídeo de alta definición y cuentan con una capacidad de carga de hasta 0.5 Kg dependiendo del modelo. La Figura 2.6 muestra uno de estos modelos.

**Figura 2.6**



En el campo de la investigación se ha producido un incremento en el desarrollo de trabajos y tesis doctorales en los últimos años. La mayor parte de ellas centran sus esfuerzos en las dos líneas siguientes:

- La aplicación de modelos dinámicos más fieles a la realidad que permitan tener en cuenta con exactitud aspectos aerodinámicos y constructivos de la pala.
- La aplicación de diferentes tipos de control para el aparato. Es aquí donde se han centrado la mayor parte de los trabajos de investigación, aplicando técnicas de control borroso, control de Lyapunov, teoría del control óptimo y algunas otras, que vienen a sumarse al tradicional control PID.

Se presentan a continuación algunos de los quadrotor desarrollados en universidades de todo el mundo. Resulta interesante observar las diferentes configuraciones geométricas dentro de este tipo de UAV.



Stanford



Univ. Pennsylvania



Univ. Compiègne



ANU



CEA



Stanford



Univ. Oldenburg



MIT

Figura 2.7

## 2.3 Objetivos

El presente proyecto final de carrera no tiene como objetivo el desarrollo de un prototipo concreto de quadrotor, ni en lo referente al diseño aerodinámico y mecánico, ni en lo concerniente a la simulación.

El objetivo final del proyecto es desarrollar un simulador de vuelo en tiempo real para vehículos aéreos no tripulados del tipo quadrotor. El simulador debe tener la capacidad de modelar el quadrotor que el usuario del software desee previamente a la simulación.

Debido a la generalidad del objetivo anterior se hace necesario definir una serie de metas concretas, cuya consecución permita alcanzar el objetivo final. Estas metas son:

- Establecer las variables características que definen la modelización de cada quadrotor. Estas variables incluyen el dimensionamiento del vehículo, la selección de ciertos materiales, la configuración de la geometría, el diseño del rotor o la selección de motores y baterías.
- Llevar a cabo el estudio aerodinámico de los rotores para la implementación de las fuerzas y momentos aerodinámicos en el modelo dinámico.
- Establecer un modelo dinámico para el vuelo del aparato que gobierne la simulación.
- Desarrollar un software con capacidad para la modelización del quadrotor, la simulación del vuelo en tiempo real a través de un joystick comercial y la gestión de archivos a través de una interface gráfica.

Los principales logros del proyecto toda vez que los objetivos sean satisfechos son:

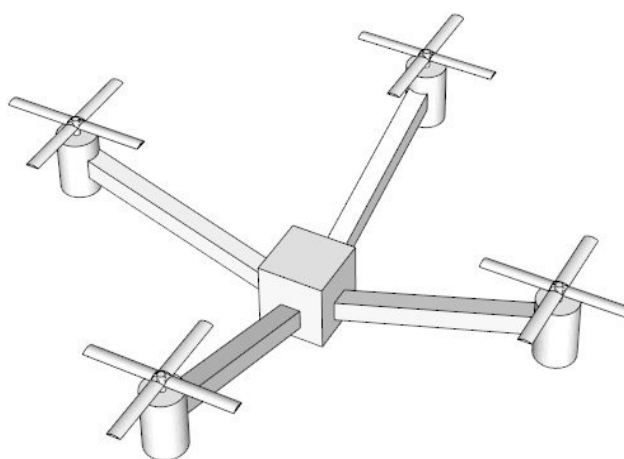
- La creación de un simulador de vuelo en tiempo real específico para el modelo de UAV quadrotor.
- La capacidad para modelar cualquier quadrotor, incluso modelos comerciales, actuales o futuros, con gran precisión.
- La creación de una base de datos de motores y baterías comerciales cuya selección forma parte del proceso de modelización.
- La generalidad del programa permitiría futuras ampliaciones en el proceso de modelización o la aplicación del programa a otro tipo de vehículo aéreo no tripulado sin excesiva complejidad.
- Como consecuencia de los logros anteriores, el software se convierte en una herramienta para el proceso de diseño de UAV del tipo quadrotor ya que es posible simular el vuelo de un modelo antes de su fabricación.

### 3. RECOPIACIÓN Y PRESENTACIÓN DE DATOS

En el siguiente capítulo se procede a explicar cuáles han sido los modelos revisados en la bibliografía, cuáles de ellos han sido escogidos y qué hipótesis se han realizado. Para ello se organiza el capítulo en cinco apartados; inicialmente uno para explicar el funcionamiento del quadrotor y otros cuatro que coinciden con las partes en las que se ha dividido el trabajo.

#### 3.1 Funcionamiento general de un quadrotor

Tal y como se ha explicado anteriormente, el quadrotor es un vehículo formado, básicamente por una estructura en forma de cruz que consta de cuatro sistemas rotor-motor situados en los extremos de los brazos. La electrónica, las baterías y la posible carga adicional que transporta el helicóptero se sitúan en torno a la estructura central, que en este trabajo se nombrará con el nombre de caja central.



**Figura 3.1**

La fuerza de sustentación necesaria para elevar el quadrotor del suelo y mantener el vuelo se consigue gracias a la fuerza de empuje generada por los cuatro rotores, cuya suma debe ser, en general, mayor que la fuerza debida al peso. En los esquemas siguientes se representan los sentidos de giro de los rotores, donde se puede observar que dos de ellos giran en sentido horario, y otros dos en sentido antihorario. Estas características son comunes a todos los vehículos del tipo quadrotor.

Los regímenes de vuelo del quadrotor son los siguientes:

- Modo de hover: El modo de hover o planeamiento consiste en mantener constante la altura del quadrotor. Para ello, los cuatro rotores deben girar a la misma velocidad (velocidad de hover) para producir la misma fuerza de sustentación. Además, la suma de estas cuatro fuerzas debe coincidir con el peso del quadrotor.

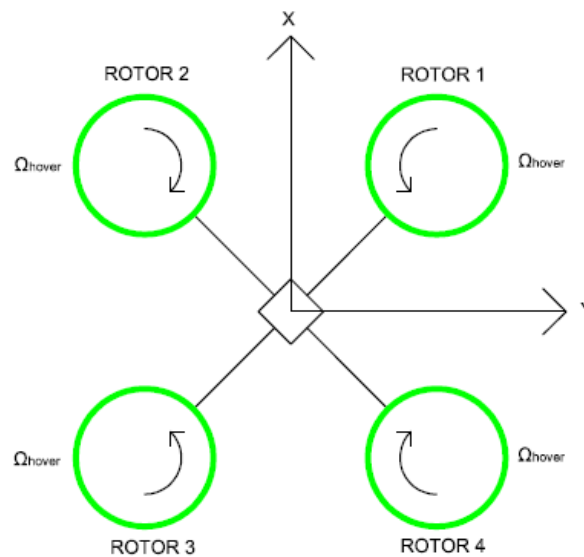


Figura 3.2

- Modo de vuelo axial: El modo de vuelo axial se consigue haciendo girar los cuatro rotores a la misma velocidad, siendo esta velocidad mayor que la de hover (vuelo axial ascendente, Figura 3.3) o menor que la de hover (vuelo axial descendente, Figura 3.4).

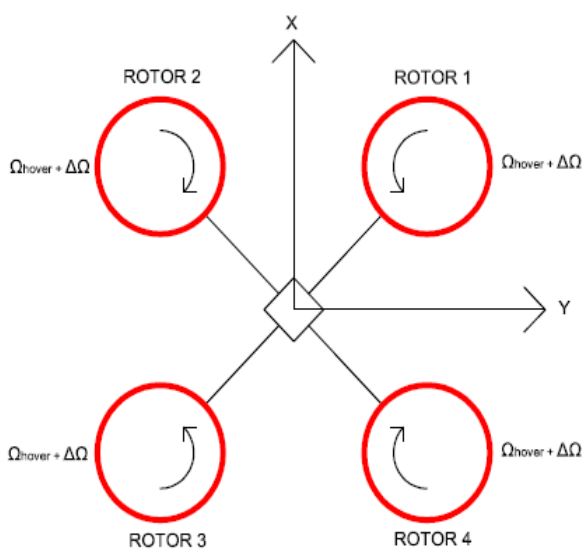


Figura 3.3

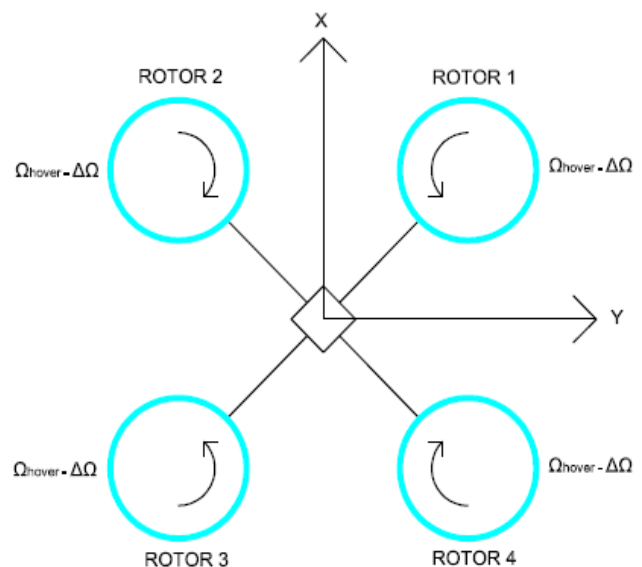


Figura 3.4

- Modo de autorrotación: El modo de autorrotación consiste en el giro del helicóptero en torno al eje  $z$  del mismo. Si se parte de un régimen de hover, la autorrotación en sentido antihorario se consigue aplicando un incremento en la velocidad de giro de los rotores 1 y 3, y un decremento (de la misma magnitud que el incremento) en la velocidad de giro de los rotores 2 y 4 (Figura 3.5). Para la autorrotación en sentido

horario el incremento se aplica sobre los rotores 2 y 4, y el decremento sobre el 1 y el 3 (Figura 3.6). De esta forma se consigue realizar la autorrotación sin cambiar, teóricamente, la fuerza vertical total de sustentación que mantiene constante la altitud.

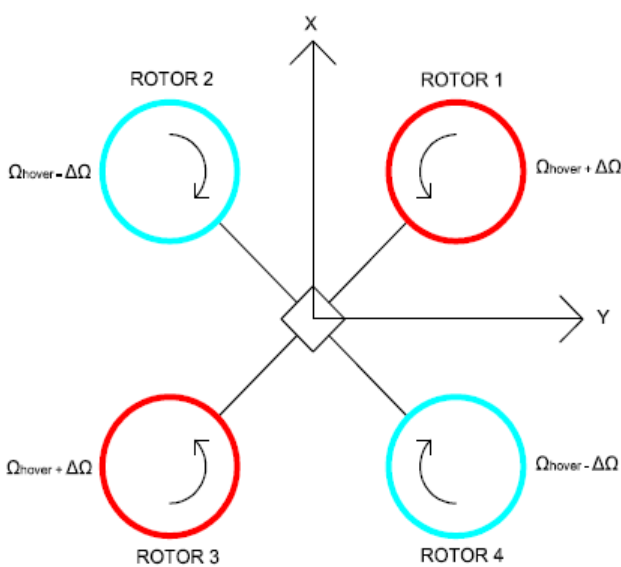


Figura 3.5

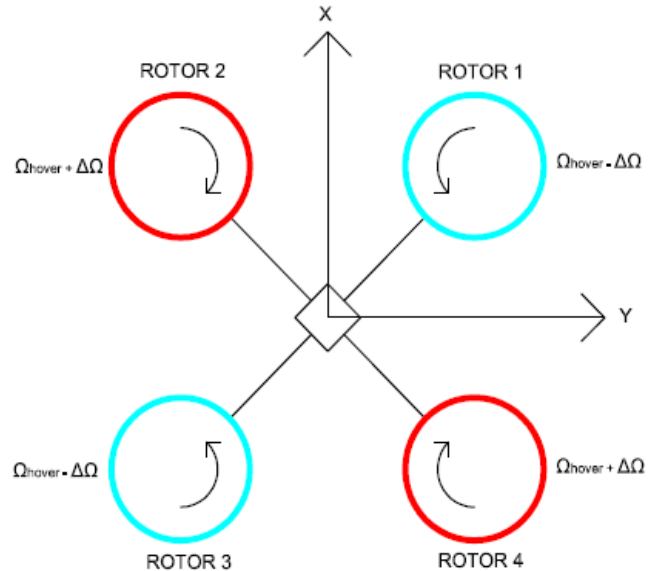


Figura 3.6

- Modo de vuelo de avance: El vuelo de avance puede llevarse a cabo en torno a dos direcciones de avance, en general, coincidentes con el eje **x** y con el eje **y**. El vuelo de avance puede lograrse de dos formas distintas que se explican a continuación.
  - Si se parte de un régimen de hover, el vuelo de avance puede lograrse aplicando un incremento en la velocidad de giro del rotor 1 y un decremento (de la misma magnitud que el incremento) en la velocidad de giro del rotor 3, manteniendo la velocidad de hover para los rotores 2 y 4 (Figura 3.7). El vuelo de avance se realiza entonces en una dirección coincidente con la de la recta bisectriz de los ejes **x** e **y**. Las Figuras 3.8, 3.9 y 3.10 muestran cómo realizar el vuelo de avance en otros sentidos. Las referencias [7], [8], [12], [20] y [21] optan por esta opción.

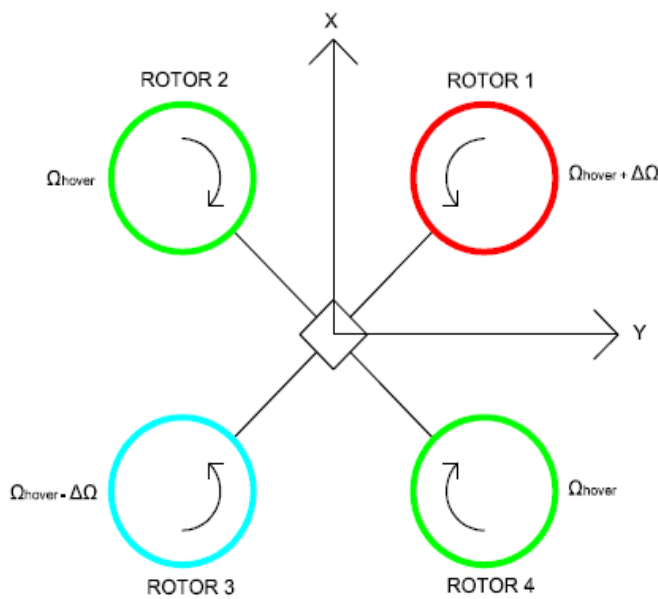


Figura 3.7

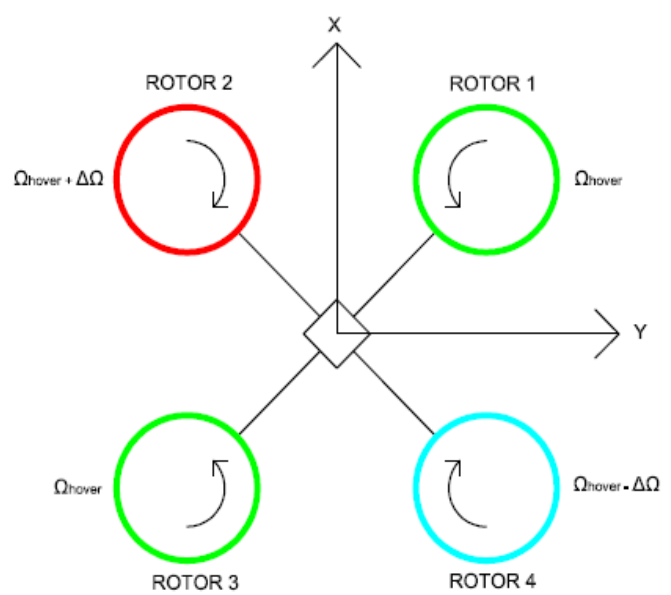


Figura 3.8

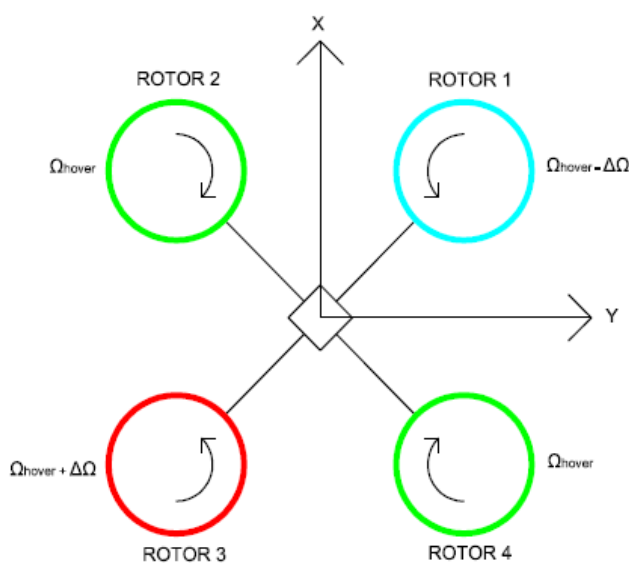


Figura 3.9

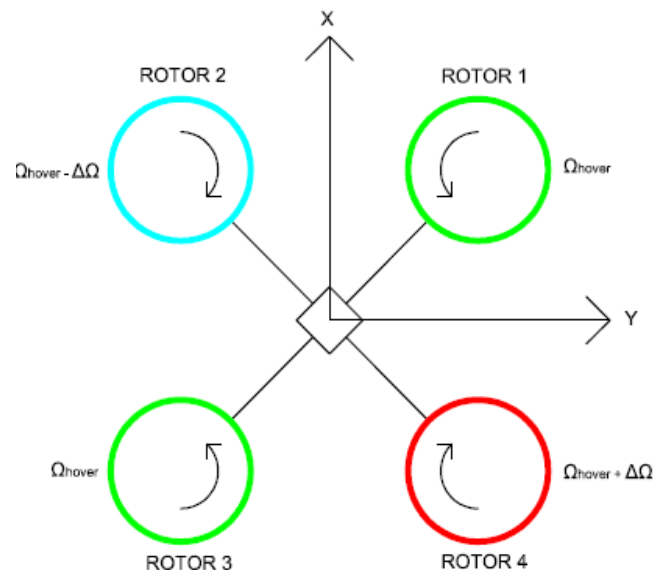


Figura 3.10

- Si se parte de un régimen de hover, el vuelo de avance puede lograrse aplicando un incremento en la velocidad de giro de los rotores 1 y 2, y un decremento (de la misma magnitud que el incremento) en la velocidad de giro de los rotores 3 y 4 (Figura 3.11). De esta manera se avanza en la dirección **x** con sentido negativo. La Figura 3.13 muestra cómo se realiza el vuelo de avance en la dirección **x** con sentido positivo. Lo mismo puede decirse para el avance en la dirección **y** (Figura 3.12 y Figura 3.14). Esta es la forma de implementar el vuelo de avance que finalmente se ha

programado. Las referencias [9] y [15] optan por esta opción. El quadrotor de la marca Parrot, que comenzó a comercializarse a finales de 2010, también implementa el vuelo de avance de esta forma.

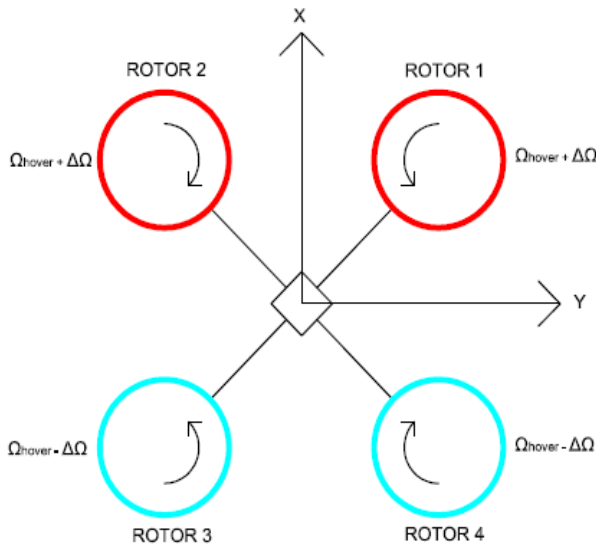


Figura 3.11

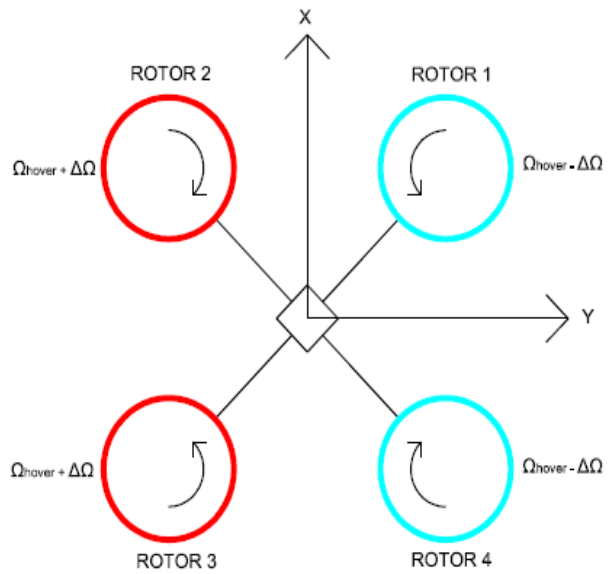


Figura 3.12

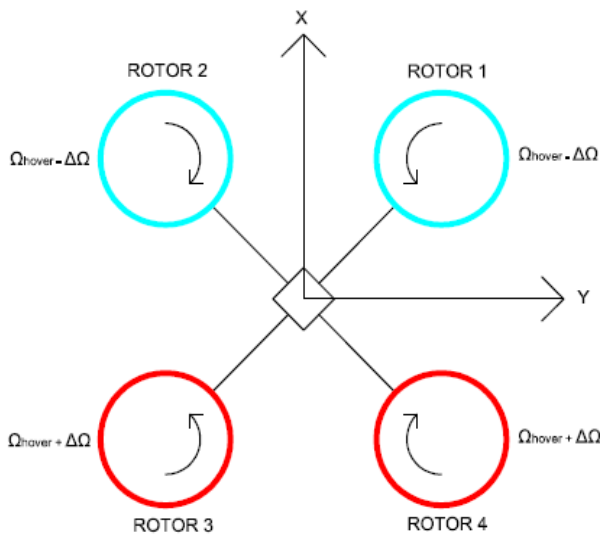


Figura 3.13

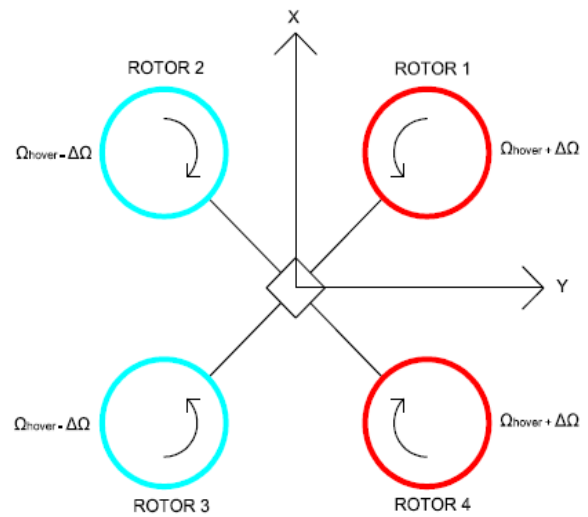


Figura 3.14

No obstante, las ecuaciones que rigen el comportamiento cinemático y dinámico del quadrotor son las mismas, independientemente de la manera de implementar el vuelo de avance. Son las referencias dadas a cada uno de los motores el único cambio que se experimenta.



### 3.2 Consideraciones para el modelo del rotor

Existen en la bibliografía diferentes teorías aerodinámicas de posible aplicación al modelo del rotor. Las más extendidas son la teoría de la cantidad de movimiento y la teoría del elemento de pala.

No obstante, existen modelos más complejos, como las teorías turbillonarias y potenciales. La teoría de la cantidad de movimiento limita la acción perturbadora del rotor sobre la corriente de aire a un determinado tubo de corriente y no permite la completa determinación del campo de velocidades. Por otro lado, la teoría del elemento de pala requiere el conocimiento de la velocidad inducida en la superficie del rotor.

Un estado más completo del campo de velocidades puede conseguirse teniendo en cuenta las velocidades inducidas producidas por una serie de singularidades, como son los torbellinos. Estas teorías se recogen en la referencias [2] y [3].

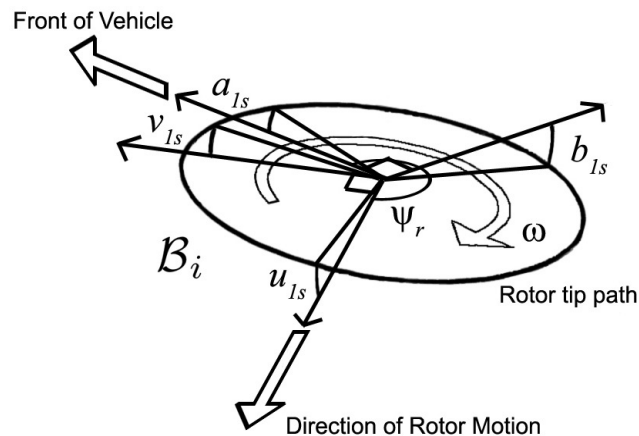
Se ha considerado suficientemente precisa la determinación de las fuerzas y momentos aerodinámicos que se obtienen de la combinación de la teoría de la cantidad de movimiento y del elemento de pala. En primer lugar, la resolución de las ecuaciones matemáticas que rigen el campo de velocidades inducidas en la superficie del rotor no supone una elevada complejidad, y por tanto, no ralentiza los tiempos de cálculo. En segundo lugar, los trabajos de investigación más importantes desarrollados en el campo de los quadrotors sugieren la utilización de estas dos teorías. Las referencias [7] y [8] desarrollan sus trabajos en esta dirección.

Por otro lado, cabe destacar que generalmente la modelización de las palas se hace totalmente rígida ya que simplifica mucho los cálculos. Existen, sin embargo, publicaciones donde las palas de los rotores son elásticas. La referencia [19] lleva a cabo un completo trabajo donde se analizan las implicaciones que tiene una pala flexible en la dinámica de un UAV considerado como sólido rígido (a excepción de las mencionadas palas). El estudio concluye mencionando la influencia que tiene el concepto de pala flexible sobre la localización del centro de gravedad del quadrotor y sobre el diseño de lazos de control. Otro análisis más sencillo es presentado en la referencia [18] donde se presenta una fórmula para calcular la deformación elástica en cada sección de la pala.

Por último, existen también modelos de rotor en los que las palas tienen más de un grado de libertad. Es decir, la pala no gira contenida en un plano, sino que puede realizar movimientos de arrastre y batimiento, cuya dinámica es mucho más rápida en comparación con la del quadrotor considerado como sólido rígido. La referencia [17] presenta un completo resumen de la influencia que tiene la inclusión de más grados de libertad de la pala en el modelo dinámico. El estudio afirma que estos movimientos mejoran la estabilidad del sistema, especialmente la de aquellos quadrotor de elevadas dimensiones. La referencia [20] desarrolla también esta solución. La Figura 3.15 muestra un esquema utilizado para el estudio de los movimientos del rotor.

Estos modelos se han deshechado porque uno de los requerimientos fijados para la modelización del quadrotor ha sido la reducción de las partes móviles que pudieran plantearse en un diseño. El modelo más sencillo es aquel en el cual las palas no pueden realizar movimientos de arrastre y batimiento, que se estudia en las referencias [7], [8],

[9], [11], [12], [21] y [22].



**Figura 3.15**

### 3.3 Consideraciones para el modelo del quadrotor

La modelización del quadrotor se realiza considerándolo como sólido rígido. Esta hipótesis es asumida por la inmensa mayoría de las investigaciones publicadas, ya que la implementación de las ecuaciones cinemáticas y dinámicas son más sencillas. De esta forma el control y la simulación se convierten en el eje central de estos estudios, para lo cual se asume que el quadrotor queda definido por su masa, su matriz de inercia y la posición del centro de gravedad. Las referencias [7], [8], [9], [11], [12], [13], [14], [15], [17], [20] y [21] apuntan en esta dirección.

Como excepción se puede señalar la referencia [22] que presenta un interesante estudio de los brazos de la estructura del quadrotor a través del método de los elementos finitos. En este estudio, validado experimentalmente, se lleva a cabo un análisis de la distribución de tensiones de Von Mises sobre un brazo de fibra de Carbono.

Por otro lado, y asumiendo ya que el quadrotor se comporta como sólido rígido, es necesario explicar cómo se determinan habitualmente las tres constantes mencionadas anteriormente: masa, matriz de inercia y posición del centro de gravedad.

La mayor parte de los estudios relativos a la modelización de un quadrotor desarrollan su trabajo en torno a un único modelo en particular, especialmente cuando el objetivo final es el control y/o la implementación de la electrónica necesaria. El proceso de modelización se reduce entonces a una tarea de pesado y posicionamiento de las partes que componen el helicóptero en cuestión. Posteriormente, asumiendo que cada una de las masas se concentra en un punto, se calcula la matriz de inercia. Este es el proceso que se lleva a cabo en las referencias [8], [17] y [22].

En otras ocasiones el objetivo no es sólo implementar un control, sino diseñar completamente un quadrotor. En este caso, la labor de pesado y posicionamiento de las partes es sustituida por estudios que pretenden determinar cuál es la configuración más adecuada del helicóptero y cuáles son los componentes que satisfacen los requerimientos funcionales del diseño. De esta forma, la determinación de la masa, la matriz de inercia y

la posición del centro de gravedad es más compleja. La referencia [7] es un ejemplo de este caso.

Pero el proceso de modelización del quadrotor que se lleva a cabo en el presente proyecto no puede ser clasificado en ninguna de las dos categorías anteriores por las siguientes razones:

- No se cuenta con un modelo físico sobre el cual calcular las constantes necesarias pesando y posicionando las partes del helicóptero.
- Tampoco se pretende abordar el problema del diseño óptimo del quadrotor.

Debe recordarse que el objetivo no es desarrollar un simulador de vuelo para un modelo concreto, sino que el software simule el vuelo de cualquier quadrotor modelado por el usuario. Esto exige una tarea, aunque primitiva, de diseño. Esta tarea consiste en la definición de una serie de partes que compongan el quadrotor, y la configuración de las mismas, que obviamente, no hace óptimo el diseño desde el punto de vista mecánico. Para ello se calcula la masa, la matriz de inercia y la posición de dichas partes tal y como se explica en el Capítulo 4.

Las partes en las que se divide el quadrotor son las siguientes:

- Estructura: caja central y brazos.
- Caja de componentes electrónicos.
- Motores.
- Batería.
- Palas que forman el rotor.
- Carga adicional.

Se ha seguido como patrón la referencia [8] que detalla cómo calcular la matriz de inercia de cada componente conociendo su masa, su geometría y su posición respecto a un sistema de coordenadas.

Especialmente importante es el estudio de los motores y la batería del helicóptero. Los motores empleados habitualmente son brushless, es decir, sin escobillas. Se diferencian de los motores de continua con escobillas en que tienen un mayor rendimiento. Esto permite en general mayores tiempos de vuelo porque la descarga de la batería es más lenta. Además, para la misma potencia, los motores sin escobillas pesan menos y son más pequeños. No obstante, los motores brushless son más caros y requieren de un control electrónico más complejo. Las referencias [7], [10], [13], [15], [17] y [18] utilizan este tipo de motores.

En la base de datos de motores también se añaden varios con escobillas de la marca japonesa Mabuchi que cuentan con prestaciones parecidas a las ofrecidas por los motores brushless aunque con rendimientos inferiores. La referencia [22] es un ejemplo de quadrotor con motor con escobillas.

En lo referente a las baterías, estas son del tipo Litio-Polímero. Se caracterizan por tener una densidad de energía entre 5 y 12 veces superior a las de Níquel-Cadmio o las de Níquel-Hidruro metálico a igualdad de peso. Esto les ha hecho especialmente empleadas para el vuelo de UAV. Las referencias [7], [10], [15] y [22] utilizan baterías de Litio-

Polímero.

### 3.4 Consideraciones para el modelo dinámico

La bibliografía presenta variedad de modelos dinámicos aplicables al quadrotor. La mayoría se diferencian en la inclusión o no dentro del modelo de determinadas fuerzas y momentos, aunque también existen diferencias en la forma de calcular cada fuerza o momento particular.

En primer lugar, la modelización se puede llevar a cabo de dos formas distintas. Los modelos que se describen en la bibliografía son los siguientes:

- Formalismo de Euler – Lagrange: Se define una función de energía cinética y otra función de energía potencial, y se relacionan ambas con las fuerzas y momentos actuantes sobre el sistema. Las referencias [9] y [12] realizan este análisis para la modelización dinámica.
- Formalismo de Newton – Euler: Se utilizan los ángulos de Euler y la segunda ley de Newton para establecer el modelo dinámico. Las referencias [8], [11], [15], [17] y [21] emplean esta opción.

La referencia [7] lleva a cabo el modelo dinámico de las dos maneras.

El modelo dinámico en el que se basa este proyecto son las ecuaciones de Newton – Euler.

Por otro lado, ya se ha mencionado que no todos los modelos tienen en cuenta las mismas fuerzas y momentos. Los modelos más sencillos toman únicamente en consideración la fuerza del peso y del empuje aerodinámico, y el momento aerodinámico en el eje motor, así como el generado por el empuje. La Tabla 3.1 resume cuáles son las fuerzas y momentos que se aplican en las principales referencias de la bibliografía. En el desarrollo del modelo dinámico del presente proyecto se ha seguido fundamentalmente el trabajo recogido en la referencia [7], que presenta el modelo más completo de todos.

Uno de los requisitos básicos que se ha tenido en cuenta en la implementación del modelo dinámico es que el tiempo de cálculo en cada paso de la simulación debía ser lo suficientemente pequeño como para que las simulaciones se llevasen a cabo en tiempo real. Como es lógico, no es posible conocer el tiempo de cálculo antes de llevar a cabo las primeras simulaciones. Esto dio lugar a un progresivo proceso consistente en ir aumentando la complejidad del modelo dinámico a medida que se comprobaba que la simulación podía ejecutarse en tiempo real.

Es decir, en un primer momento el modelo dinámico implementado no recogía todas las fuerzas y momentos que se computan en la referencia [7]. Por ejemplo, no se recogía el llamado efecto tierra, ni el rozamiento con el aire ni tampoco los llamados momentos aerodinámicos en ejes distintos al motor<sup>2</sup>, cuya contribución en las ecuaciones de Newton es poco importante, motivo por el cual algunas referencias optan por no introducirlas en

<sup>2</sup> El capítulo siguiente detalla el origen de estas fuerzas y momentos y cómo se computan.

sus modelos. Posteriormente, el modelo adquirió complejidad, recogiendo los fenómenos citados con el objetivo de asemejar en lo posible las simulaciones con la realidad física que rige el comportamiento del quadrotor.

|          | TÍTULO  | Design and control of quadrotors with application to autonomous flying | Modelling, identification and control of a quadrotor helicopter | Control of a quadrotor using dual camera visual | Design principles of large quadrotors for practical applications | Georgia Tech Team entry for the 2010 AUVSI International Aerial Robotics Competition | Modelling and control of a large quadrotor robot | Quadrotor trajectory tracking control | Design and control of an indoor Micro Quadrotor | PROYECTO FINAL DE CARRERA |
|----------|---|--|---|---|--|--|--|---------------------------------------|---|---------------------------|
|          | REFERENCIA                                      | 7  | 8   | 11  | 13   | 15   | 17   | 20                                    | 21  |                           |
| FUERZAS  | PESO  | X  | X   | X   | X  | X  | X  | X                                     | X   | X                         |
|          | EMPUJE AERODINÁMICO                             | X  | X   | X   | X  | X  | X  | X                                     | X   | X                         |
|          | ARRASTRE AERODINÁMICO                           | X  | X   | X   | X  |  | X  |                                       |   | X                         |
|          | ROZAMIENTO CON EL AIRE                          | X  |   | X   |  |  |  | X                                     | X   | X                         |
|          | EFFECTO TIERRA                                  | X  |   |   |  |  |  |                                       |   | X                         |
| MOMENTOS | DINÁMICA DE LOS MOTORES                         | X  | X   |   |  |  |  |                                       | X   | X                         |
|          | MOMENTO DEL EMPUJE                              | X  | X   | X   | X  | X  | X  | X                                     | X   | X                         |
|          | MOMENTO DEL ARRASTRE                            | X  | X   | X   | X  |  | X  |                                       |   | X                         |
|          | MOMENTO AERODINÁMICO EN EJE MOTOR               | X  | X   | X   | X  | X  | X  | X                                     | X   | X                         |
|          | MOMENTO AERODINÁMICO EN EJES DISTINTOS AL MOTOR | X  |   |   |  |  |  |                                       |   | X                         |
|          | EFFECTOS GIROSCÓPICOS                           | X  | X   |   |  | X  |  |                                       |   | X                         |

**Tabla 3.1**

Por último, es importante señalar que no todos los modelos presentes en la bibliografía calculan un mismo tipo de fuerza o momento de la misma forma. Son las fuerzas y momentos aerodinámicos los que son computados de diferente manera.

La referencia [7] calcula el empuje, el arrastre y los momentos aerodinámicos a través de las teorías de la cantidad de movimiento y del elemento de pala, haciendo uso de coeficientes aerodinámicos adimensionales. La referencia [8] simplifica el cálculo presentado en [7] ya que los coeficientes aerodinámicos que utiliza (en este caso dimensionales) son constantes, de manera que el cálculo del empuje, el arrastre y los momentos aerodinámicos se hace exclusivamente como una función de la velocidad de giro de los rotores. Esta simplificación también es utilizada en la referencia [7] para la implementación de distintos tipos de control. Lo mismo puede decirse de las referencias [11], [13], y [21].

No obstante, en la referencia [17] se presenta un estudio en el que los coeficientes aerodinámicos adimensionales son inicialmente constantes (y por tanto las fuerzas y momentos aerodinámicos son función únicamente de la velocidad de giro de los rotores). Posteriormente, analiza el caso de coeficientes variables en función de la velocidad inducida en el rotor, el ángulo de ataque, la velocidad de giro del rotor y la velocidad axial del quadrotor. El estudio es válido para el caso en el que los movimientos de arrastre y batimiento de las palas están permitidos, opción que no se trata en este proyecto.

Una de las razones para llevar a cabo el cálculo de las fuerzas y momentos aerodinámicos únicamente como una función de la velocidad de giro de los rotores es la reducción de esfuerzo computacional que supone. De esta forma, en cada instante de la simulación no es necesario efectuar el cálculo de la velocidad inducida<sup>3</sup>.

Una solución más original al problema anterior es la siguiente. En lugar de simplificar los cálculos aerodinámicos para reducir el esfuerzo computacional que debe hacerse durante las simulaciones es posible almacenar las fuerzas y momentos aerodinámicos, calculados de manera previa a la simulación, en matrices de dimensión 3. Dado que las fuerzas y momentos aerodinámicos dependen exclusivamente del diseño del rotor<sup>4</sup>, en el presente proyecto se ha optado por almacenar sus valores en las llamadas *Cartas de navegación*<sup>5</sup>, que constituyen un modelo de rotor que el software de modelización del quadrotor puede cargar. Esta es una de las novedades que presenta este trabajo respecto a las publicaciones ya existentes. Esta solución permite aumentar la complejidad del modelo, desde el punto de vista aerodinámico, sin que suponga un aumento en el esfuerzo computacional que debe hacerse durante la simulación.

### 3.5 Consideraciones para la simulación en tiempo real

En general, la mayor parte de los trabajos desarrollados en la bibliografía no ejecutan simulaciones en tiempo real a través de una interface gráfica que ayude a crear un entorno de simulación. Esto se debe al hecho de que estos estudios ponen especial énfasis en la implementación de algoritmos de control, y no en el desarrollo de un simulador de vuelo. Las referencias [11], [12], [13] y [21] apuntan en esta dirección.

Por otro lado, cabe preguntarse cuál es el programa informático más adecuado para ejecutar la simulación en tiempo real. El empleo habitual de Simulink y otras toolboxes específicas de Matlab para programar el modelo dinámico invita a utilizar también este programa para la simulación. Las referencias [7] y [8] lo utilizan, pero las salidas gráficas que proporcionan son muy básicas.

Otra opción es utilizar un software específico, tal y como se recoge en la referencia [15] que utiliza un programa desarrollado por el Georgia Tech UAV. Otro software específico de aviación es FlighGear.

La selección de un programa adecuado para la simulación en tiempo real era un punto importante en el desarrollo de este proyecto. Inicialmente se planteó la opción de utilizar Matlab pero con unas salidas gráficas más potentes que las que presentan las referencias [7] y [8]. La toolbox de Matlab llamada Virtual Reality permite realizar simulaciones y visualizarlas a través del programa VRML. La razón por la cual se acabó descartando esta opción para la visualización es el hecho de que Matlab, en conexión con VRML, no permite desarrollar fácilmente la interface gráfica final. Es decir, la salida gráfica formada

<sup>3</sup> El cálculo de la velocidad inducida implica la resolución de un polinomio de orden cuatro en el caso general de vuelo de avance. Si se trata de vuelo axial, el polinomio a resolver es de segundo orden. En ambos casos, los coeficientes del polinomio son función de parámetros aerodinámicos. Estas cuestiones se discuten con detalle en el siguiente capítulo.

<sup>4</sup> El siguiente capítulo proporciona un estudio detallado de esta cuestión.

<sup>5</sup> Las llamadas *Cartas de navegación* son las matrices de dimensión 3. Se almacena una matriz por cada fuerza o momento aerodinámico que se incluye en el modelo.

por las ventanas de visualización y el panel de control que se asemeja al que posee un helicóptero real<sup>6</sup>.

La solución a este problema ha sido la utilización simultánea, y en tiempo real de dos programas.

- Matlab: A través de Simulink y otras toolboxes se calcula en cada paso de la simulación los valores de las variables: posición, velocidad, aceleración, etc... También se utiliza para leer las referencias del joystick.
- LabVIEW: Se utiliza para crear el entorno del simulador. Consta de las ventanas de visualización y el panel de control. Este programa permite implementar las salidas gráficas de manera más sencilla pero más real.

---

<sup>6</sup> El panel de control posee distinta información: los valores de posición y velocidad del quadrotor, el horizonte artificial, paneles que simulan el estado de cada rotor y de la batería, etc...



## 4. DESARROLLO DEL TRABAJO

### 4.1 Introducción

En el presente capítulo se procede a explicar el contenido del proyecto desarrollado. La modelización del quadrotor como sólido rígido exige el estudio previo de la aerodinámica del rotor tal y como se verá a continuación.

A su vez, la modelización del quadrotor permitirá resolver las ecuaciones dinámicas más fácilmente, ya que una vez establecido el modelo, se obtendrá la masa, la matriz de inercia del helicóptero y la posición del centro de gravedad.

La simulación en tiempo real implica la resolución de las ecuaciones dinámicas en tiempo real cuando el usuario del simulador establece las referencias de velocidad a través de un joystick.

Así pues, la Figura 4.1 resume las distintas partes y las aportaciones de cada una de ellas.

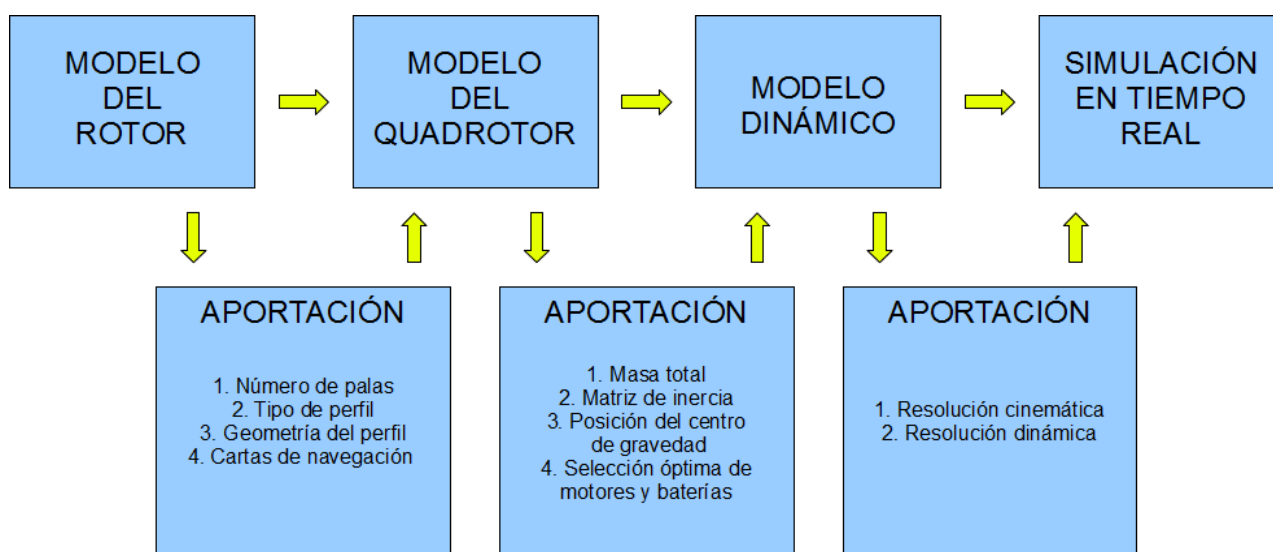


Figura 4.1

### 4.2 Modelo del rotor

#### 4.2.1 Procedimiento

El objetivo de la modelización del rotor es obtener las llamadas *Cartas de navegación*. Se trata de matrices de tres entradas que contienen información acerca de las fuerzas y momentos aerodinámicos dadas unas condiciones de velocidad absoluta del rotor  $V$ , velocidad de giro del rotor  $\Omega$ , y ángulo entre rotor y velocidad  $\alpha_v$ .



Previamente deben definirse otras variables que caracterizan el rotor, como su geometría, que son explicadas en el apartado 4.2.2.

El almacenamiento de la aerodinámica del rotor en matrices, de manera previa a la simulación lleva aparejadas las siguientes consideraciones.

Las principales ventajas son:

- Elimina la necesidad de efectuar los cálculos aerodinámicos en cada paso de la simulación, ya que únicamente es necesario obtener las variables de salida (empuje, par, etc...) por interpolación a partir de las 3 variables de entrada mencionadas.
- Permite realizar los cálculos aerodinámicos de manera más compleja. Las simplificaciones que se llevan a cabo para la reducción del coste computacional no son ahora necesarias. Como se verá, la obtención de las variables de salida requiere de bastantes operaciones matemáticas, incluida la resolución de un polinomio de cuarto grado.
- Proporciona la posibilidad de almacenar la información para futuras simulaciones. Es decir, no es necesaria efectuar una modelización del rotor cada vez que se vaya a ejecutar una simulación, basta con cargar un modelo del rotor (las *Cartas de navegación*) previamente almacenado.
- Permite desacoplar, de manera casi total, la modelización aerodinámica de la modelización del quadrotor<sup>7</sup>. Es decir, el modelo del rotor almacenado podría utilizarse para otro tipo de helicóptero<sup>8</sup>.

No obstante, este procedimiento tiene alguna desventaja asociada:

- El proceso de cálculo requiere rellenar cada una de las posiciones  $i,j,k$  de cada matriz. Cada posición corresponde a un régimen de vuelo. El inconveniente del método utilizado es que únicamente una minoría de los regímenes de vuelo calculados se utilizarán en la simulación. A priori, la modelización del rotor desconoce cuáles serán las posiciones de la matriz que serán utilizadas durante dicha simulación.
- El inconveniente anterior lleva aparejado el empleo de tiempo para el cálculo de regímenes de vuelo no utilizados, así como la necesidad de usar zona de memoria del ordenador con información que no se utilizará.

El procedimiento de modelización del rotor consta de cuatro etapas.

<sup>7</sup> El desacoplamiento no es total porque la selección de los motores y la batería del quadrotor dependen del modelo de rotor creado.

<sup>8</sup> Especialmente interesante sería la aplicación del modelo del rotor para helicópteros del tipo quadrotor con 8 rotores (4 rotores coaxiales) o el modelo de 6 rotores (3 rotores coaxiales) de la marca Draganfly. No obstante, el modelo del rotor necesitaría de alguna modificación por el hecho de tratarse estos dos casos de rotores coaxiales.

- Establecimiento de las hipótesis del rotor y de sus características geométricas.
- Estudio del vuelo axial.
- Estudio del vuelo de avance.
- Implementación del modelo.

#### 4.2.2 Hipótesis del rotor y características geométricas

La modelización del rotor implica el estudio de la aerodinámica del mismo. Este estudio se ha hecho a partir de la teoría de la cantidad de movimiento y de la teoría del elemento de pala, tal y como se ha comentado en el capítulo anterior.

La teoría de cantidad de movimiento permite determinar las fuerzas que actúan sobre un rotor por medio de la variación de la cantidad de movimiento de la masa de aire afectada. La Figura 4.2 representa el tubo de corriente tomado para su análisis.

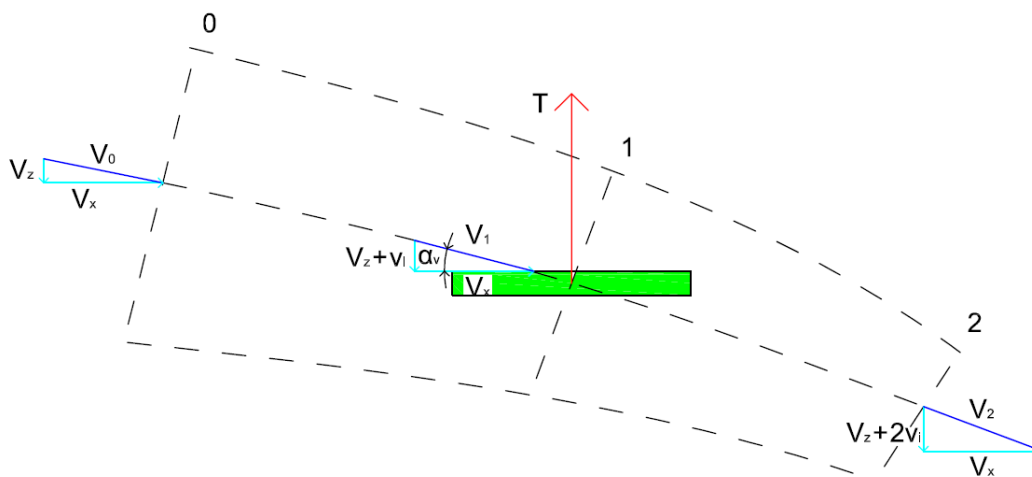


Figura 4.2

De acuerdo a esta teoría, para una situación estacionaria, el cambio de cantidad de movimiento del aire al pasar del infinito aguas arriba (sección 0 de la figura anterior) al infinito aguas abajo (sección 2 de la figura anterior) es igual a la tracción resultante de las acciones del aire sobre el rotor, igual y opuesta a las del rotor sobre el aire. El ANEXO A presenta una detallada explicación de la teoría de la cantidad de movimiento, deduciéndose la siguiente expresión para la fuerza de tracción o empuje del rotor.

$$T = 2 \rho S v_i \sqrt{V_x^2 + (V_z + v_i)^2} \quad (4.1)$$

La teoría del elemento de pala toma para su estudio un ala de envergadura diferencial en régimen bidimensional de corriente, de tal forma que las fuerzas aerodinámicas dependerán de la velocidad relativa de su punto de referencia respecto al aire.

Esta teoría, define las expresiones diferenciales de empuje y par a partir de los valores del empuje y el par de referencia respectivamente ( $T_u$  y  $Q_u$ ) y hace uso de unos coeficientes adimensionales de tracción ( $dC_T$ ) y de par ( $dC_{Q_0}$  y  $dC_{Q_i}$ ).

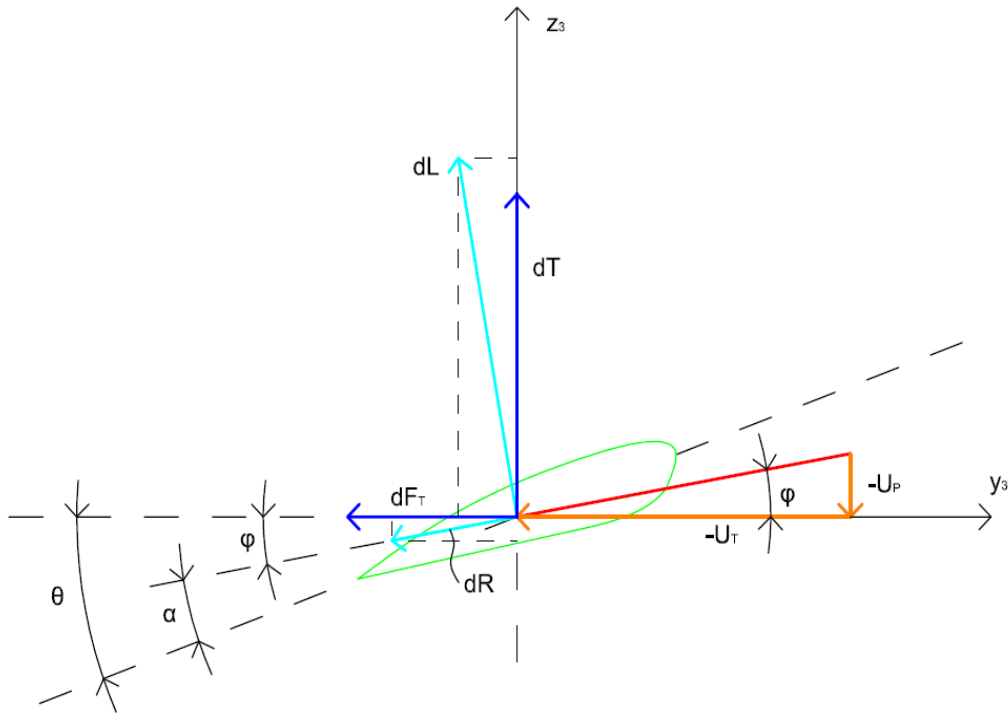


Figura 4.3

$$dT = dC_T T_u \quad (4.2)$$

$$dQ_0 = dC_{Q0} Q_u \quad (4.3)$$

$$dQ_i = dC_{Qi} Q_u \quad (4.4)$$

Estos coeficientes toman la siguiente forma, tal y como se deduce en el ANEXO A.

$$dC_T = \frac{\sigma c_l}{2} \left( \frac{U_T}{\Omega R} \right)^2 dx \quad (4.5)$$

$$dC_{Q0} = \frac{\sigma c_d}{2} \left( \frac{U_T}{\Omega R} \right)^2 x dx \quad (4.6)$$

$$dC_{Qi} = \frac{\sigma c_l}{2} \left( \frac{U_P}{\Omega R} \right) \left( \frac{U_T}{\Omega R} \right) x dx \quad (4.7)$$

Se puede comprobar que la fuerza de empuje y el par generado por cada elemento diferencial de pala dependen de la velocidad relativa respecto al aire que ve cada elemento.

Por otro lado, la resolución de la aerodinámica del rotor supone establecer unas hipótesis para el cálculo. Por ello, se han tomado las siguientes simplificaciones:

- Las palas se suponen totalmente rígidas, de manera que no existe deformación de su geometría.
- Los ángulos de arrastre y batimiento de las palas son constantes con el tiempo e iguales a 0. Esta hipótesis implica que el único grado de libertad de las palas es el giro respecto al eje vertical al plano que pasa por las palas. Esta afirmación no influye en el estudio del vuelo axial, únicamente tiene efectos para el vuelo de avance.
- Quedan al margen de este estudio los fenómenos vibratorios y de fatiga.
- El valor de la densidad del aire permanece constante con la altura.
- Se ha tomado un valor de radio efectivo de la pala del 96 % de su radio debido al efecto de pérdidas en punta de pala provocado por los vórtices. Este valor es sugerido por la referencia [3].
- Las curvas características del perfil, coeficiente de sustentación vs ángulo de ataque y coeficiente de arrastre vs coeficiente de sustentación son independientes del número de Reynolds.

Una vez establecidas las hipótesis se procede a detallar las variables de entrada que se han considerado para el modelo del rotor. Estas variables se han dividido en tres tipos.

- Características atmosféricas.
- Características constructivas de pala.
- Variables para el cálculo.

#### 4.2.2.1 Características atmosféricas

- Densidad del aire ( $\rho$ ): Tal y como se ha dicho permanece constante. Por defecto se toma el valor de  $1.2 \text{ Kg/m}^3$ .
- Viscosidad dinámica del aire ( $\mu$ ): También permanece constante. Por defecto se toma el valor de  $0.00001789 \text{ Kg/ms}$ .

#### 4.2.2.2 Características constructivas de pala

- Número de palas que forman el rotor ( $b$ ).
- Radio interior ( $R_{\text{int}}$ ): Se define como la distancia que existe desde el eje de giro de las palas, hasta el encastre de las palas.
- Radio exterior ( $R_{\text{ext}}$ ): Es el valor del radio de la pala medida desde el eje de giro.
- Cuerda ( $c$ ): Se define como el valor de la cuerda del perfil en cada uno de los  $n + 1$

puntos en los que se ha dividido la pala. Las distribuciones de cuerda consideradas pueden ser de tres tipos:

- Distribución constante de cuerda: La cuerda del perfil es constante a lo largo de la envergadura de la pala. Requiere, por tanto, un único valor de entrada designado como  $c_{\text{punta}}$ .
  - Distribución lineal de cuerda: La cuerda del perfil varía linealmente desde el encastre, donde toma un mayor valor  $c_{\text{encastre}}$ , hasta la punta  $c_{\text{punta}}$ .
  - Distribución hiperbólica de cuerda: La cuerda del perfil varía de manera hiperbólica. La condición que se cumple a lo largo de la pala es  $cr = cte$ . Requiere, por tanto, un único valor de entrada designado como  $c_{\text{punta}}$ .
- Perfil de pala: La selección de un perfil de pala concreto implica el conocimiento de las siguientes características<sup>9</sup>:

➤ Curva que relaciona el coeficiente de sustentación ( $c_l$ ) con el ángulo de ataque ( $\alpha$ ). La expresión que relaciona estas variables es simplificada por la siguiente fórmula:

$$c_l = c_0 + a \alpha \quad (4.8)$$

Se considera que el coeficiente de sustentación es una función lineal del ángulo de ataque.  $c_0$  es el coeficiente de sustentación cuando el ángulo de ataque es 0.  $a$  es la pendiente de la recta.

- Curva que relaciona el coeficiente de arrastre ( $c_d$ ) con el ángulo de ataque ( $\alpha$ ), o en su defecto, curva que relaciona el coeficiente de arrastre con el coeficiente de sustentación.
  - Ángulo de ataque máximo hasta entrar en pérdidas ( $\alpha_{\text{max}}$ ).
  - Ángulo de ataque mínimo para el cual se definen las curvas anteriores ( $\alpha_{\text{min}}$ ).
  - Ángulo de ataque óptimo ( $\alpha_{\text{opt}}$ ): Hace referencia al ángulo de ataque cuya relación  $c_d / c_l$  es mínima, es decir, es el ángulo de ataque que consigue mayor sustentación con un menor arrastre.
- Alabeo de la pala ( $\theta$ ): La distribución del alabeo de la pala o *twist* hace referencia a la torsión que tiene la pala en su eje longitudinal. Los tipos de distribuciones de alabeo que se consideran son:
    - Distribución de alabeo constante: La pala se diseña sin variación de alabeo. Requiere, por tanto, un único valor de entrada designado como  $\theta_{\text{punta}}$ .

<sup>9</sup> El software tiene almacenada la información de un único perfil de pala pero la estructura de la programación está orientada a que en futuras versiones exista una base de datos con diferentes modelos. El perfil de pala almacenado como muestra es el ANUX2 que se ha utilizado en algunos quadrotors.

- Distribución de alabeo lineal: La variación de alabeo en la pala varía linealmente desde el encastre ( $\theta_{\text{encastre}}$ ) hasta la punta ( $\theta_{\text{punta}}$ ).
- Distribución de alabeo óptimo: La variación de alabeo en la pala se diseña de forma óptima para un determinado régimen. (Ver apartado 4.2.2.5).

#### 4.2.2.3 Variables para el cálculo

Las llamadas variables para el cálculo son un pequeño grupo de datos de entrada necesarios para realizar los cálculos aerodinámicos. Como se ha dicho en 4.2.1 estas variables son la velocidad absoluta del rotor  $\mathbf{V}$ , la velocidad de giro del rotor  $\mathbf{\Omega}$ , y el ángulo entre rotor y velocidad  $\alpha_v$ . Estas variables son introducidas a través del software de modelización del rotor en forma de intervalo. Es decir, se presenta un intervalo de velocidad absoluta del rotor ( $\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_f$ ), velocidad de giro del rotor ( $\mathbf{\Omega}_i - \mathbf{\Omega}_f$ ), y de ángulo entre rotor y velocidad ( $\alpha_{vi} - \alpha_{vf}$ ). De esta forma, se calculan las variables de salida para cualquier combinación de  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{\Omega}$  y  $\alpha_v$  que pertenezcan a sus respectivos intervalos.

Otra variable de cálculo es el número de pasos de integración ( $n$ ): Se define como el número de particiones en las que se divide la pala desde su radio interior hasta su radio exterior. Por tanto, el número de puntos de cálculo son  $n + 1$ ; donde el punto 1 corresponde a  $\mathbf{R}_{\text{int}}$ , y el punto  $n + 1$  corresponde al punto  $0.96\mathbf{R}_{\text{ext}}$ .

#### 4.2.2.4 Resumen de las variables de entrada y salida

En los apartados precedentes se han explicado las consideraciones que se han tomado para las variables de entrada. Una vez introducidas éstas a través del software de modelización del rotor el programa está listo para proporcionar las variables de salida, cada una de las cuales se corresponde con una matriz de dimensión 3. Estas son las *Cartas de navegación*, tal y como se ha mencionado anteriormente. La información almacenada es la siguiente<sup>10</sup>:

- Fuerza de empuje.
- Fuerza de arrastre.
- Par en el eje motor.
- Par en el eje de la fuerza de arrastre.
- Potencia total.
- Situación del régimen de vuelo: en pérdidas o no.

Para terminar con este apartado se presenta la siguiente tabla que presenta un resumen de las variables de entrada y salida.

En los apartados 4.2.3 y 4.2.4 se presentan los estudios del vuelo axial y el vuelo de avance que permiten determinar las variables de salida siguientes.

<sup>10</sup> De las 6 *Cartas de navegación*, 5 de ellas se utilizan en los cálculos del modelo dinámico. La matriz de Potencia total tiene únicamente carácter informativo.

| ENTRADA                 |  |                   | CÁLCULOS INTERMEDIOS |          | SALIDA                 |          |
|-------------------------|--|-------------------|----------------------|----------|------------------------|----------|
| VARIABLE                |  | SÍMBOLO           | VARIABLE             | SÍMBOLO  | VARIABLE               | SÍMBOLO  |
| Atmosféricas            | Densidad del aire                                | $\rho$            | Solidez              | $\sigma$ | Empuje                 | $T$      |
|                         | Viscosidad dinámica del aire                     | $\mu$             | Velocidad inducida   | $v_i$    | Arrastre               | $H$      |
| Configuración general   | Número de palas                                  | $b$               | Ángulo de ataque     | $\alpha$ | Par en eje motor       | $Q$      |
|                         | Radio interior                                   | $R_{int}$         | Ángulo azimutal      | $\psi$   | Par en eje de arrastre | $M$      |
|                         | Radio exterior                                   | $R_{ext}$         |                      |          | Potencia total         | $P$      |
| Perfil de pala          | Coefficiente de sustentación cuando $\alpha = 0$ | $c_0$             |                      |          | Situación de régimen   | $S_{pn}$ |
|                         | Pendiente  | $a$               |                      |          |                        |          |
|                         | Ángulo de ataque óptimo                          | $\alpha_{opt}$    |                      |          |                        |          |
|                         | Ángulo de ataque máximo                          | $\alpha_{max}$    |                      |          |                        |          |
|                         | Ángulo de ataque mínimo                          | $\alpha_{min}$    |                      |          |                        |          |
|                         | Área unitaria                                    | $A_p$             |                      |          |                        |          |
|                         | Espesor unitario                                 | $h_p$             |                      |          |                        |          |
| Distribución de cuerdas |  |                   |                      |          |                        |          |
| Constante               | Cuerda en punta de pala                          | $c_{punta}$       |                      |          |                        |          |
| Lineal                  | Cuerda en punta de pala                          | $c_{punta}$       |                      |          |                        |          |
|                         | Cuerda en encastre de pala                       | $c_{encastre}$    |                      |          |                        |          |
| Hiperbólica             | Cuerda en punta de pala                          | $c_{punta}$       |                      |          |                        |          |
| Distribución de alabeo  |  |                   |                      |          |                        |          |
| Cálculo óptimo          | Velocidad axial                                  | $V_{z_{opt}}$     |                      |          |                        |          |
|                         | Número de Reynolds                               | $Re_{opt}$        |                      |          |                        |          |
|                         | Velocidad de giro del rotor                      | $\Omega_{opt}$    |                      |          |                        |          |
| Lineal                  | Ángulo de alabeo en origen de pala               | $\theta_{origen}$ |                      |          |                        |          |
|                         | Ángulo de alabeo en punta de pala                | $\theta_{punta}$  |                      |          |                        |          |
| Constante               | Ángulo de alabeo en origen de pala               | $\theta_{origen}$ |                      |          |                        |          |
| Cálculo                 | Número de pasos de integración                   | $n$               |                      |          |                        |          |
|                         | Velocidad absoluta mínima del rotor              | $V_i$             |                      |          |                        |          |
|                         | Velocidad absoluta máxima del rotor              | $V_f$             |                      |          |                        |          |
|                         | Velocidad de giro mínima del rotor               | $\Omega_i$        |                      |          |                        |          |
|                         | Velocidad de giro máxima del rotor               | $\Omega_f$        |                      |          |                        |          |
|                         | Ángulo mínimo entre rotor y velocidad            | $\alpha_{vi}$     |                      |          |                        |          |
|                         | Ángulo máximo entre rotor y velocidad            | $\alpha_{vf}$     |                      |          |                        |          |

Tabla 4.1

#### 4.2.2.5 Resolución del problema de la distribución de alabeo óptimo

La distribución de alabeo óptimo es aquella que hace que el ángulo de ataque a lo largo de la envergadura de la pala sea el óptimo para un régimen concreto de vuelo. Para la resolución matemática del problema se combina la teoría de la cantidad de movimiento y la teoría del elemento de pala.

De acuerdo a la notación que se presenta a continuación,  $R$  hace referencia al radio del rotor y se tomará igual a  $R_{ext}$ . Según la teoría del elemento de pala, y haciendo uso de (4.5), para vuelo axial<sup>11</sup>:

$$dC_T = \frac{\sigma c_l}{2} x^2 dx = \frac{\sigma (c_0 + a\alpha(x))}{2} x^2 dx \quad (4.9)$$

$$dT = \rho (\pi R^2) (\Omega R)^2 dC_T \quad (4.10)$$

<sup>11</sup> Las expresiones de partida para la resolución del problema de alabeo óptimo se deducen con detalle en el ANEXO A.

Según la teoría de la cantidad de movimiento:

$$d\mathbf{T} = 2 \rho (2 \pi r dr) \mathbf{v}_i(\mathbf{x}) (\mathbf{V}_z + \mathbf{v}_i(\mathbf{x})) = 2 \rho (2 \pi x R^2 dx) \mathbf{v}_i(\mathbf{x}) (\mathbf{V}_z + \mathbf{v}_i(\mathbf{x})) \quad (4.11)$$

La expresión (4.11) representa el empuje que proporciona un anillo circular de espesor  $dr$ . Por tanto el área diferencial es  $2\pi r dr$ . Sustituyendo (4.9) en (4.10) e igualando con (4.11) se obtiene:

$$d\mathbf{T} = \rho (\pi R^2) (\Omega R)^2 \frac{\sigma(c_0 + a\alpha(\mathbf{x}))}{2} x^2 dx = 2 \rho (2 \pi x R^2 dx) \mathbf{v}_i(\mathbf{x}) (\mathbf{V}_z + \mathbf{v}_i(\mathbf{x}))$$

(4.12)

$$(\Omega R)^2 \frac{\sigma(c_0 + a\alpha(\mathbf{x}))}{2} x = 4 \mathbf{v}_i(\mathbf{x}) (\mathbf{V}_z + \mathbf{v}_i(\mathbf{x})) \quad (4.13)$$

Por otro lado, la teoría del elemento de pala establece la siguiente relación entre ángulos:

$$\theta(r) = \alpha(r) + \varphi(r) = \alpha(r) + \frac{\mathbf{V}_z + \mathbf{v}_i(r)}{\Omega r} \quad (4.14)$$

La condición para alabeo óptimo es:

$$\alpha(r) = \alpha_{\text{opt}} \quad (4.15)$$

La distribución de alabeo será:

$$\theta(r) = \alpha_{\text{opt}} + \frac{\mathbf{V}_z + \mathbf{v}_i(r)}{\Omega r} \quad (4.16)$$

Escribiendo la expresión anterior en función de la variable adimensional  $x$ , en lugar de  $r$ , se tiene:

$$x = \frac{r}{R} \quad \theta(x) = \alpha_{\text{opt}} + \frac{\mathbf{V}_z + \mathbf{v}_i(x)}{\Omega x R} \quad (4.17)$$

Se despeja la expresión de la velocidad inducida:

$$\mathbf{v}_i(x) = \Omega x R (\theta(x) - \alpha_{\text{opt}}) - \mathbf{V}_z \quad (4.18)$$

Se sustituye (4.18) en la fórmula de (4.13):

$$(\Omega R)^2 \frac{\sigma(c_0 + a\alpha_{\text{opt}})}{2} x = 4 [\Omega x R (\theta(x) - \alpha_{\text{opt}}) - \mathbf{V}_z] (\mathbf{V}_z + [\Omega x R (\theta(x) - \alpha_{\text{opt}}) - \mathbf{V}_z])$$

(4.19)



$$(\Omega R)^2 \sigma (c_0 + a\alpha_{opt}) x = 8 [ (\Omega x R (\theta(x) - \alpha_{opt}))^2 - \Omega x R (\theta(x) - \alpha_{opt}) V_z ]$$

(4.20)

$$(\Omega R) \sigma (c_0 + a\alpha_{opt}) x = 8 [ \Omega R x^2 (\theta(x) - \alpha_{opt})^2 - x (\theta(x) - \alpha_{opt}) V_z ]$$

(4.21)

$$(\Omega R) \sigma (c_0 + a\alpha_{opt}) x = 8 [ \Omega R x^2 (\theta^2(x) + \alpha_{opt}^2 - 2\theta(x)\alpha_{opt}) - x (\theta(x) - \alpha_{opt}) V_z ]$$

(4.22)

Finalmente se obtiene un polinomio de segundo grado, cuya solución permite obtener el ángulo de paso en función del radio de pala, el perfil de pala, la solidez, la velocidad de giro y la velocidad de vuelo axial para la cual se optimiza el alabeo. Se escribirá este polinomio en función de la velocidad de giro  $\Omega_{opt}$  y la velocidad axial  $V_{z_{opt}}$  que el usuario introduce para la optimización.

$$8 \Omega_{opt} R x^2 \theta^2(x) - 8 (2 \Omega_{opt} R x^2 \alpha_{opt} + x V_{z_{opt}}) \theta(x) + 8 \Omega_{opt} R x^2 \alpha_{opt}^2 + 8 x \alpha_{opt} V_{z_{opt}} - (\Omega_{opt} R) \sigma (c_0 + a\alpha_{opt}) x = 0$$

(4.23)

Una solución particularmente interesante del problema de la distribución óptima de alabeo se encuentra cuando se optimiza esta función para el caso de hover o planeamiento. Bajo esta condición,  $V_{z_{opt}} = 0$ , y la expresión (4.23) queda:

$$8 x \theta^2(x) - 16 x \alpha_{opt} \theta(x) + 8 x \alpha_{opt}^2 - \sigma (c_0 + a\alpha_{opt}) = 0 \quad (4.24)$$

La expresión anterior puede expresarse también de la siguiente manera:

$$\theta^2(x) - 2 \alpha_{opt} \theta(x) + \alpha_{opt}^2 - \frac{\sigma (c_0 + a\alpha_{opt})}{8 x} = 0 \quad (4.25)$$

El polinomio anterior permite obtener conclusiones interesantes. Para régimen de hover, la distribución óptima de alabeo es únicamente función del perfil de pala ( $c_0$ ,  $a$ ,  $\alpha_{opt}$ ), y de las características del rotor que se engloban en la variable solidez  $\sigma$  ( $b$ ,  $c$ ,  $R$ ). La importancia de este hecho radica en que el alabeo óptimo no depende de la velocidad de giro del rotor  $\Omega_{opt}$  si este se encuentra en hover.

Diseñando el alabeo para la condición de planeamiento queda asegurado que cuando el quadrotor realice vuelo de hover, régimen muy habitual para las labores de observación, sea cual sea el peso del helicóptero (ya que es independiente de las revoluciones por minuto a las cuales deben girar los motores para lograr la sustentación) la aerodinámica proporciona máximo coeficiente de sustentación con mínimo coeficiente de arrastre.

El software de modelización del rotor implementa la distribución de alabeo óptimo al introducir la velocidad axial  $V_{z_{opt}}$  y velocidad de giro  $\Omega_{opt}$ . El programa permite introducir el número de Reynolds para el cual optimizar el alabeo. Esta opción no es, en principio, la recomendada, ya que como se ha dicho las características del perfil de pala se toman

independientes del número de Reynolds. Se trata más bien, de una opción que tomaría más sentido en el caso de clasificar los distintos regímenes de vuelo como laminares o turbulentos. En cualquier caso, si se introduce un valor del número de Reynolds, este se traduce a velocidad de giro  $\Omega_{\text{opt}}$  de la siguiente forma:

$$\Omega_{\text{opt}} = \frac{\text{Re } \mu}{\rho c_{\text{punta}} R} \quad (4.26)$$

Por otro lado, hay que destacar que el ángulo de ataque óptimo  $\alpha_{\text{opt}}$ , determinado por las características del perfil de pala, se mantiene a lo largo de toda la envergadura de la pala. De esta forma, cada diferencial de superficie de pala proporciona la máxima sustentación posible, con el mínimo arrastre, bajo las restricciones que proporciona la propia construcción del rotor (**b**, **c**, **R**).

### 4.2.3 Estudio del vuelo axial

Una vez que se han fijado las hipótesis de cálculo y las variables de entrada consideradas se procede a explicar el procedimiento de cálculo de las variables de salida. El estudio del vuelo axial es un caso particular de la aerodinámica del rotor. Resulta útil detenerse en la resolución de este problema porque aporta conclusiones válidas para el resto de regímenes de vuelo.

La Figura 4.4 muestra las principales funciones que aparecen en la resolución aerodinámica del rotor. Las dos primeras columnas (Vuelo axial y Vuelo de avance) muestran las hipótesis tomadas para el cálculo de los rotores que forman el quadrotor. La tercera columna es el caso general de vuelo de avance para cualquier helicóptero.

| VUELO AXIAL  | VUELO DE AVANCE  | CASO GENERAL   |
|--|--|--|
| $\beta = 0$<br>$\zeta = 0$                                     | $\beta = 0$<br>$\zeta = 0$   | $\beta = \beta(\Psi)$<br>$\zeta = \zeta(\Psi)$                                   |
| $\alpha = \alpha(r)$<br>$\theta = \theta(r)$<br>$v_i = v_i(r)$ | $\alpha = \alpha(r, \Psi)$<br>$\theta = \theta(r)$<br>$v_i = v_i(r, \Psi)$ | $\alpha = \alpha(r, \Psi)$<br>$\theta = \theta(r, \Psi)$<br>$v_i = v_i(r, \Psi)$ |
| $dT = dT(r)$<br>$dQ = dQ(r)$                                   | $dT = dT(r, \Psi)$<br>$dQ = dQ(r, \Psi)$                                   | $dT = dT(r, \Psi)$<br>$dQ = dQ(r, \Psi)$   |

Figura 4.4

La diferencia principal radica, tal y como se indicó anteriormente en el apartado 4.2.2, en que no se consideran los movimientos de batimiento y arrastre de las palas, únicamente existe el grado de libertad de giro de las mismas en el eje **z** del rotor.

En vuelo axial, los valores de ángulos de ataque y de inclinación dependen exclusivamente de  $r$ , distancia radial medida desde el eje y que varía a lo largo de la pala. Como consecuencia de ello, la distribución de velocidades inducidas es también una función de  $r$ ; por tanto, el empuje, el par y la potencia también lo serán.

La no dependencia de las variables anteriores con el ángulo azimutal permite una resolución más sencilla de las ecuaciones. La combinación de la teoría de la cantidad de movimiento y la teoría del elemento de pala da como resultado un polinomio de segundo grado, tal y como se dedujo en el apartado 4.2.2.5, pero en este caso la variable a resolver es la velocidad inducida  $v_i$ , toda vez que ya se ha diseñado el alabeo de la pala.

La expresión (4.13) establecía la siguiente igualdad:

$$(\Omega R)^2 \frac{\sigma(c_0 + a\alpha(x))}{2} x = 4 v_i(x) (V_z + v_i(x)) \quad (4.27)$$

Sustituyendo la función del ángulo de ataque por

$$\alpha(x) = \theta(x) - \frac{V_z + v_i(x)}{\Omega R x} \quad (4.28)$$

Entonces (4.27) queda de la siguiente manera:

$$(\Omega R)^2 \frac{\sigma\left(c_0 + a\left(\theta(x) - \frac{V_z + v_i(x)}{\Omega R x}\right)\right)}{2} x = 4 v_i(x) (V_z + v_i(x)) \quad (4.29)$$

$$(\Omega R)^2 x \sigma c_0 + (\Omega R)^2 x \sigma a \theta(x) - (\Omega R) \sigma a (V_z + v_i(x)) = 8 v_i(x) (V_z + v_i(x)) \quad (4.30)$$

En la expresión (4.30) aparece la función de alabeo  $\theta(x)$ , pero se trata de una función conocida porque fue establecida previamente como variable de entrada. Se plantea el polinomio de segundo grado para la velocidad inducida:

$$v_i^2(x) + \left( V_z + \frac{(\Omega R) \sigma a}{8} \right) v_i(x) - \frac{(\Omega R)^2 x \sigma}{8} \left( c_0 + a \theta(x) - \frac{a V_z}{(\Omega R) x} \right) = 0 \quad (4.31)$$

La solución general es:

$$v_i(x) = \frac{-\left(v_z + \frac{(\Omega R) \sigma a}{8}\right) \pm \sqrt{\left(v_z + \frac{(\Omega R) \sigma a}{8}\right)^2 - 4 \left(-\frac{(\Omega R)^2 x \sigma}{8} \left(c_0 + a \theta(x) - \frac{a v_z}{(\Omega R) x}\right)\right)}}{2} \quad (4.32)$$

Se toma la solución positiva de la raíz<sup>12</sup> y se opera:

$$v_i(x) = \frac{(\Omega R) \sigma a}{16} \left( \sqrt{\frac{64}{(\Omega R)^2 \sigma^2 a^2} \left( \left(v_z + \frac{(\Omega R)^2 \sigma a}{8(\Omega R)}\right)^2 + 4 \frac{(\Omega R)^2 x \sigma}{8} \left(c_0 + a \theta(x) - \frac{a v_z}{(\Omega R) x}\right)\right)} - \left(1 + \frac{8 v_z}{(\Omega R) \sigma a}\right) \right) \quad (4.33)$$

$$v_i(x) = \frac{(\Omega R) \sigma a}{16} \left( \sqrt{\left(\frac{8 v_z}{(\Omega R) \sigma a} + 1\right)^2 - \frac{32 v_z}{(\Omega R) \sigma a} + \frac{32 x}{\sigma a^2} (c_0 + a \theta(x))} - \left(1 + \frac{8 v_z}{(\Omega R) \sigma a}\right) \right) \quad (4.34)$$

Finalmente se obtiene una expresión de la velocidad inducida:

$$v_i(x) = \frac{(\Omega R) \sigma a}{16} \left( \sqrt{\left(1 - \frac{8 v_z}{(\Omega R) \sigma a}\right)^2 + \frac{32 x}{\sigma a^2} (c_0 + a \theta(x))} - \left(1 + \frac{8 v_z}{(\Omega R) \sigma a}\right) \right) \quad (4.35)$$

De la expresión anterior se deduce que la velocidad inducida varía a lo largo de la envergadura de la pala ya que es función de  $r$  (o de  $x$ , que es adimensional). Depende, a su vez, del perfil seleccionado ( $a$  y  $c_0$ ), de la distribución de alabeo con la que se diseñe la pala ( $\theta(x)$ ), de características del rotor ( $b$ ,  $c$ ,  $R$ ), y del régimen de vuelo axial al que se encuentre ( $V_z$  y  $\Omega$ ).

Para el caso particular de régimen de hover o planeamiento, se evalúa la expresión de la velocidad inducida tomando  $V_z = 0$ . En ese caso, (4.35) se simplifica:

$$v_i(x) = \frac{(\Omega R) \sigma a}{16} \left( \sqrt{1 + \frac{32 x}{\sigma a^2} (c_0 + a \theta(x))} - 1 \right) \quad (4.36)$$

Resulta interesante estudiar la importancia que tiene la distribución de alabeo en el cálculo de la velocidad inducida, ya que esta última es una función de la primera.

Por ejemplo, si la distribución de alabeo es constante, entonces la velocidad inducida

<sup>12</sup> La referencia [2] explica con detalle la razón por la cual se debe tomar la raíz positiva.

aumenta a lo largo de la envergadura de la pala. Si se diseña con alabeo óptimo para régimen de hover, entonces la velocidad inducida es constante a lo largo de la envergadura de la pala para el vuelo de hover (independientemente de si este se logra a la velocidad de giro de diseño del alabeo  $\Omega_{opt}$  o a otra<sup>13</sup>).

Una vez calculada la velocidad inducida, se calcula la distribución de ángulo de ataque a lo largo de la pala haciendo uso de la expresión (4.28). En el apartado 4.2.4 se detallan los aspectos relativos al valor del ángulo de ataque y la posible entrada en pérdidas. Dicho estudio es aplicable al vuelo axial.

Por tanto, para cualquier combinación de velocidad axial ( $V_z$ ) (velocidad relativa del rotor del helicóptero respecto al aire) y velocidad de giro del rotor ( $\Omega$ ) es posible calcular la velocidad que se induce en las palas. Y de esta manera, se evalúa la expresión del empuje que aporta la teoría de la cantidad de movimiento:

$$T = \int_{x_{int}}^{x_{ext}} dT(x) = \int_{x_{int}}^{x_{ext}} 2 \rho (\pi x R^2) v_i(x) (V_z + v_i(x)) dx \quad (4.37)$$

También es posible calcular el empuje a partir de la teoría del elemento de pala integrando la expresión (4.10):

$$T = \rho (\pi R^2) (\Omega R)^2 \int_{x_{int}}^{x_{ext}} \frac{\sigma (c_0 + a\alpha(x))}{2} x^2 dx \quad (4.38)$$

Se calcula también el par y la potencia.

$$Q = \rho (\pi R^2) R (\Omega R)^2 \left( \int_{x_{int}}^{x_{ext}} \frac{\sigma c_d}{2} x^3 dx - \int_{x_{int}}^{x_{ext}} \frac{\sigma c_l (V_z + v_i(x))}{2 \Omega R} x^2 dx \right) \quad (4.39)$$

$$P = Q \Omega \quad (4.40)$$

En vuelo axial no existe fuerza de arrastre ni momentos en otro eje distinto al perpendicular al plano del rotor.

Este apartado permite un primer acercamiento al procedimiento de cálculo de las matrices llamadas *Cartas de navegación*. Tal y como se explicó en 4.2.2, se trata de matrices de tres entradas: velocidad de vuelo, velocidad de giro y orientación. En el caso particular de vuelo axial, cada régimen viene definido a través de dos entradas: velocidad absoluta del rotor  $V$  y velocidad de giro del rotor  $\Omega$ , ya que el ángulo entre rotor y velocidad  $\alpha_v$  se mantiene constante e igual a  $90^\circ$ . Las *Cartas de navegación* se simplifican, reduciéndose a matrices de 2 dimensiones.

<sup>13</sup> La distribución de velocidad inducida es constante a lo largo de la envergadura de la pala, pero si el hover se alcanza a otra velocidad de giro distinta de la de diseño estas dos distribuciones serán distintas entre ellas. Lo que sí coincide es el valor del ángulo de ataque a lo largo de la envergadura de la pala ya que éste es el óptimo por condición de diseño.

#### 4.2.4 Estudio del vuelo de avance

El llamado vuelo de avance es una generalización de lo visto anteriormente. El procedimiento de cálculo es semejante al que se estudió en el apartado 4.2.3. Se calcula una expresión de la velocidad inducida y posteriormente se evalúa el empuje y el par a partir de las expresiones que proporciona la teoría de la cantidad de movimiento.

El resultado de este estudio son las *Cartas de navegación* de tres entradas (velocidad de vuelo, velocidad de giro y ángulo entre rotor y velocidad) necesarias para la resolución de las ecuaciones del modelo dinámico del quadrotor en tiempo real.

En este caso, la expresión de la velocidad inducida se calcula también a partir de la combinación de la teoría de la cantidad de movimiento y la teoría del elemento de pala, pero la resolución es algo más complicada. La ecuación resultante es un polinomio de cuarto grado. El motivo de que la complejidad matemática sea mayor radica en la dependencia de las ecuaciones de partida con el llamado ángulo azimutal  $\Psi$ . Esto provoca que la expresión de la velocidad inducida dependa, no sólo de  $r$ , sino también de  $\Psi$ .

Según la teoría de cantidad de movimiento:

$$dT(r, \psi) = 2 \rho (r dr d\psi) v_i(r, \psi) \sqrt{(v_i(r, \psi) - V \sin \alpha_v)^2 + (V \cos \alpha_v)^2} \quad (4.41)$$

En la expresión anterior el elemento diferencial de superficie ya no es un anillo circular de espesor  $dr$ , sino que se trata de un elemento cuya superficie es  $r dr d\Psi$ .

El empuje diferencial se puede escribir en función de la variable  $x$  adimensional de la siguiente manera:

$$dT(x, \psi) = 2 \rho R^2 (x dx d\psi) v_i(x, \psi) \sqrt{(v_i(x, \psi) - V \sin \alpha_v)^2 + (V \cos \alpha_v)^2} \quad (4.42)$$

Por otro lado, según la teoría del elemento de pala:

$$dT = \rho (\pi R^2) (\Omega R)^2 dC_T \quad (4.43)$$

donde el coeficiente adimensional de tracción es:

$$dC_T = \frac{\sigma c_l}{2} \left( \frac{U_T}{\Omega R} \right)^2 dx \quad (4.44)$$

Para vuelo de avance se tiene (ver ANEXO A)

$$\frac{U_T}{\Omega R} = x + \frac{V \cos \alpha}{\Omega R} \sin \psi \quad (4.45)$$

Entonces, sustituyendo (4.44) en (4.43) el empuje diferencial queda de la siguiente manera:

$$dT(x, \psi) = \rho(\pi R^2) \frac{\sigma(c_0 + a\alpha(x, \psi))}{2} U_T^2 dx \frac{d\psi}{2\pi} \quad (4.46)$$

Introduciendo la expresión (4.45) se tiene:

$$dT(x, \psi) = \rho(\pi R^2) \frac{\sigma(c_0 + a\alpha(x, \psi))}{2} (x\Omega R + V\cos\alpha_v \sin\psi)^2 dx \frac{d\psi}{2\pi} \quad (4.47)$$

Igualando las expresiones del empuje diferencial de las dos teorías se tiene:

$$2\rho R^2 (x dx d\psi) v_i(x, \psi) \sqrt{(v_i(x, \psi) - V\sin\alpha_v)^2 + (V\cos\alpha_v)^2} = \rho(\pi R^2) \frac{\sigma(c_0 + a\alpha(x, \psi))}{2} (x\Omega R + V\cos\alpha_v \sin\psi)^2 dx \frac{d\psi}{2\pi} \quad (4.48)$$

$$v_i(x, \psi) \sqrt{(v_i(x, \psi) - V\sin\alpha_v)^2 + (V\cos\alpha_v)^2} = \left(\frac{\sigma}{8x}\right) (c_0 + a\alpha(x, \psi)) (\Omega R x + V\cos\alpha_v \sin\psi)^2 \quad (4.49)$$

El ángulo de ataque es una función de la velocidad inducida:

$$\alpha(r, \psi) = \theta(r) - \varphi(r, \psi) = \theta(r) - \frac{v_i(r, \psi) - V\sin\alpha_v}{\Omega r + V\cos\alpha_v \sin\psi} \quad (4.50)$$

En términos de  $x$ :

$$\alpha(x, \psi) = \theta(x) - \varphi(x, \psi) = \theta(x) - \frac{v_i(x, \psi) - V\sin\alpha_v}{\Omega R x + V\cos\alpha_v \sin\psi} \quad (4.51)$$

Por simplificar la notación se llama **A** a la siguiente expresión:

$$\mathbf{A} = V\cos\alpha_v \sin\psi \quad (4.52)$$

En lo sucesivo se presentan las ecuaciones sin que en las variables aparezca la referencia explícita de su dependencia con las variables  $x$  y  $\psi$ .

Se sustituye el valor de **A** para obtener una expresión que sea función de la velocidad inducida.

$$v_i \sqrt{(v_i - V\sin\alpha_v)^2 + (V\cos\alpha_v)^2} = \left(\frac{\sigma}{8x}\right) \left(c_0 + a\left(\theta - \frac{v_i - V\sin\alpha_v}{\Omega R x + \mathbf{A}}\right)\right) (\Omega R x + \mathbf{A})^2 \quad (4.53)$$

Se eleva al cuadrado a ambos lados de la igualdad para obtener un polinomio.

$$v_i^2 ((v_i - V \sin \alpha_v)^2 + (V \cos \alpha_v)^2) = \left( \frac{\sigma}{8x} \right)^2 \left( c_0 + a \left( \theta - \frac{v_i - V \sin \alpha_v}{\Omega R x + A} \right) \right)^2 (\Omega R x + A)^4 \quad (4.54)$$

Se evaluará cada uno de los dos lados de la igualdad.

El lado de la izquierda vale:

$$\begin{aligned} v_i^2 ((v_i - V \sin \alpha_v)^2 + (V \cos \alpha_v)^2) &= v_i^2 (v_i^2 + (V \sin \alpha_v)^2 - 2 v_i V \sin \alpha_v + (V \cos \alpha_v)^2) \\ &= v_i^4 - 2 v_i^3 V \sin \alpha_v + v_i^2 V^2 \end{aligned} \quad (4.55)$$

El lado de la derecha se compone de tres términos que se multiplican entre sí. El primero de ellos empezando por la izquierda no requiere de ninguna manipulación matemática, pero los otros dos términos sí.

Se evalúa el segundo término:

$$\begin{aligned} \left( c_0 + a \left( \theta - \frac{v_i - V \sin \alpha_v}{\Omega R x + A} \right) \right)^2 &= (c_0 + a(\theta - \varphi))^2 = a^2 (\theta - \varphi)^2 + c_0^2 + 2 a (\theta - \varphi) c_0 \\ &= a^2 (\theta^2 + \varphi^2 - 2 \theta \varphi) + c_0^2 + 2 a (\theta - \varphi) c_0 \\ &= a^2 \varphi^2 - \varphi (a^2 2 \theta + 2 a c_0) + a^2 \theta^2 + c_0^2 + 2 a \theta c_0 \\ &= a^2 \left( \frac{v_i - V \sin \alpha_v}{\Omega R x + A} \right)^2 - \left( \frac{v_i - V \sin \alpha_v}{\Omega R x + A} \right) (a^2 2 \theta + 2 a c_0) + a^2 \theta^2 + c_0^2 + 2 a \theta c_0 \end{aligned} \quad (4.56)$$

Para evaluar el tercer término se utiliza el binomio de Newton:

$$(\Omega R x + A)^4 = (\Omega R x)^4 + 4 (\Omega R x)^3 A + 6 (\Omega R x)^2 A^2 + 4 (\Omega R x) A^3 + A^4 \quad (4.57)$$

Nuevamente, por simplificar la notación se llama **B** a la siguiente expresión:

$$B = \left( \frac{\sigma}{8x} \right)^2 (\Omega R x + A)^4 = \left( \frac{\sigma}{8x} \right)^2 ((\Omega R x)^4 + 4 (\Omega R x)^3 A + 6 (\Omega R x)^2 A^2 + 4 (\Omega R x) A^3 + A^4) \quad (4.58)$$

De esta manera, el segundo lado de la ecuación (4.54) queda de la siguiente forma:



$$v_i^4 - 2v_i^3 V \sin \alpha_v + v_i^2 V^2 = B \left[ a^2 \left( \frac{v_i - V \sin \alpha_v}{\Omega R x + A} \right)^2 - \left( \frac{v_i - V \sin \alpha_v}{\Omega R x + A} \right) (a^2 2\theta + 2ac_0) + a^2 \theta^2 + c_0^2 + 2a\theta c_0 \right]$$

$$v_i^4 - 2v_i^3 V \sin \alpha_v + v_i^2 V^2 = \left[ B \left( \frac{a^2}{(\Omega R x + A)^2} \right) v_i^2 - B \left( \frac{2a^2 V \sin \alpha_v}{(\Omega R x + A)^2} + \frac{a^2 2\theta + 2ac_0}{\Omega R x + A} \right) v_i + \right. \\ \left. + B \left( \frac{a^2 V^2 \sin^2 \alpha_v}{(\Omega R x + A)^2} + \frac{(a^2 2\theta + 2ac_0) V \sin \alpha_v}{\Omega R x + A} + a^2 \theta^2 + c_0^2 + 2a\theta c_0 \right) \right]$$

(4.59)

Finalmente se obtiene el polinomio de cuarto grado:

$$v_i^4 - (2V \sin \alpha_v) v_i^3 + \left( V^2 - \frac{Ba^2}{(\Omega R x + A)^2} \right) v_i^2 + B \left( \frac{2a^2 V \sin \alpha_v}{(\Omega R x + A)^2} + \frac{a^2 2\theta + 2ac_0}{\Omega R x + A} \right) v_i - \\ - B \left( \frac{a^2 V^2 \sin^2 \alpha_v}{(\Omega R x + A)^2} + \frac{(a^2 2\theta + 2ac_0) V \sin \alpha_v}{\Omega R x + A} + a^2 \theta^2 + c_0^2 + 2a\theta c_0 \right) = 0$$

(4.60)

La resolución de la ecuación (4.60) resulta imprescindible para la determinación de las variables de salida. La velocidad inducida es diferente, en general a lo largo de la envergadura de la pala (variable  $x$ ) y las diferentes posiciones azimutales (variable  $\Psi$ ). Depende, como en el caso de vuelo axial, del perfil de pala empleado ( $a$  y  $c_0$ ), de la distribución de alabeo con la que se diseña la pala ( $\theta(x)$ ), de características del rotor ( $b$ ,  $c$ ,  $R$ ), y del régimen de vuelo que se considere ( $V$ ,  $\Omega$  y  $\alpha_v$ ).

No obstante, al tratarse de un polinomio de cuarto grado se obtienen 4 soluciones: 4 posibles valores de velocidad inducida que hay que discriminar, ya que sólo una es la solución que físicamente tiene sentido.

La solución tomada para la velocidad inducida es una solución real (generalmente se obtienen dos soluciones reales y dos imaginarias). Además, se trata de la solución real cuyo error  $E$  es mínimo. Se define el error como la diferencia que existe entre los dos lados de la igualdad dada en la expresión (4.50).

$$E = v_i(x, \psi) \sqrt{(v_i(x, \psi) - V \sin \alpha_v)^2 + (V \cos \alpha_v)^2} - \left( \frac{\sigma}{8x} \right) (c_0 + a\alpha(x, \psi)) (\Omega R x + V \cos \alpha_v \sin \psi)^2$$

(4.61)

Teóricamente el error debe ser 0 porque así lo impone la condición (4.49). Ahora bien, existe un error de cálculo que introduce el programa Matlab. Las soluciones obtenidas para la velocidad inducida tienen un error pequeño (del orden de  $1e-13$ ). Por tanto, para aquellas soluciones reales se toma la que minimiza (4.61), sabiendo que el error de la solución es despreciable.

Cuando se da el caso de que dos o más soluciones del polinomio tienen un error pequeño

se toma aquella solución que hace continua la distribución de velocidad inducida, es decir, aquella que toma un valor más próximo a sus vecinos.

Una vez evaluada la velocidad inducida, se calcula el ángulo de ataque correspondiente a dicho elemento diferencial  $r \, dr \, d\Psi$  haciendo uso de la expresión (4.50). Se distinguen tres posibles situaciones:

- $\alpha > \alpha_{\max}$  Si el ángulo de ataque calculado es mayor que  $\alpha_{\max}$  significa que se ha entrado en pérdidas.
- $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$  Si el ángulo de ataque calculado se encuentra comprendido entre el ángulo de ataque mínimo y máximo el perfil de pala no ha entrado en pérdidas. Se trata de la situación más habitual.
- $\alpha < \alpha_{\min}$  Si el ángulo de ataque se encuentra por debajo del mínimo significa que no está definido por las curvas que relaciona los coeficientes de sustentación y arrastre con el ángulo de ataque. A nivel de las *Cartas de navegación*, se considera también régimen de pérdidas.



Figura 4.5

El cálculo de la fuerza de empuje se calcula de manera similar al caso de vuelo axial, pero en este caso hay que recordar que el elemento diferencial de área que la genera no es un anillo circular sino el elemento  $r \, dr \, d\Psi$ .

Para el cálculo del par en el eje motor se debe utilizar la siguiente expresión deducida del ANEXO A.

$$dQ = \rho (\pi R^2) R (\Omega R)^2 \left( \frac{\sigma c_d}{2} \left( \frac{U_T}{\Omega R} \right)^2 x \, dx + \frac{\sigma c_l}{2} \left( \frac{U_P}{\Omega R} \right) \left( \frac{U_T}{\Omega R} \right) x \, dx \right) \quad (4.62)$$

Además, para el vuelo de avance es necesario añadir el cálculo de la fuerza de arrastre  $H$  y del momento en el eje de la fuerza de arrastre  $M$ , cuya deducción matemática también se presenta en el ANEXO A.

El arrastre es una fuerza aerodinámica contenida en el plano del rotor cuya dirección se opone a la dirección de la proyección del vector velocidad del rotor sobre el plano del

rotor. La Figura 4.6 ayuda a entender este concepto.

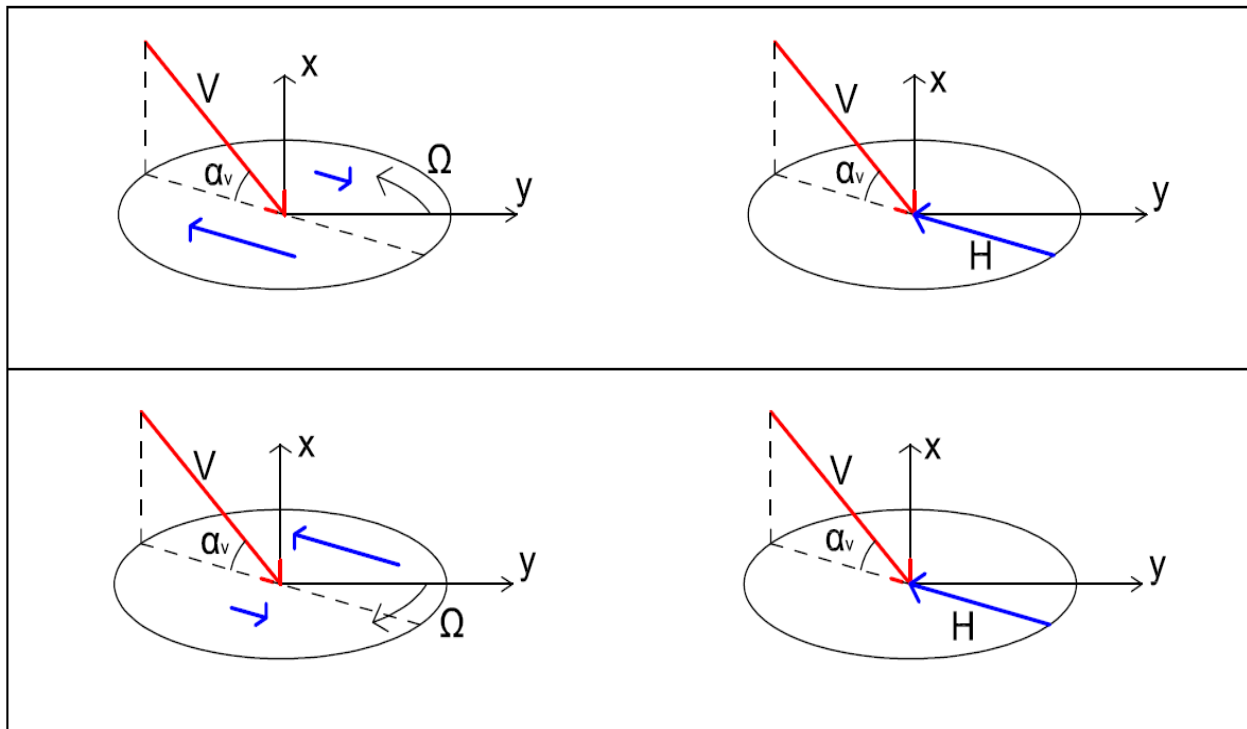


Figura 4.6

Los valores de la fuerza de arrastre que se almacenan en la correspondiente *Carta de navegación* son independientes de la orientación del vector velocidad respecto a los ejes fijos del rotor ( $\beta_v$ ). El cálculo de las componentes de la fuerza de arrastre en dichos ejes fijos se lleva a cabo durante la simulación en tiempo real y se explica con detalle en el apartado 4.4.

La fuerza diferencial de arrastre que produce un elemento diferencial de área es:

$$dH \approx \sin \psi dD + \sin \psi \left( \frac{-V \sin \alpha_v + v_i}{V \cos \alpha_v \sin \psi + \Omega R x} \right) dL \quad (10.63)$$

En la expresión anterior  $dL$  y  $dD$  son las fuerzas de sustentación y resistencia del perfil respectivamente.

Por otro lado, el momento aerodinámico en el eje de la fuerza de arrastre es:

$$dM = r \sin \psi dT \quad (10.64)$$

En la Figura 4.7 se representa esta acción.

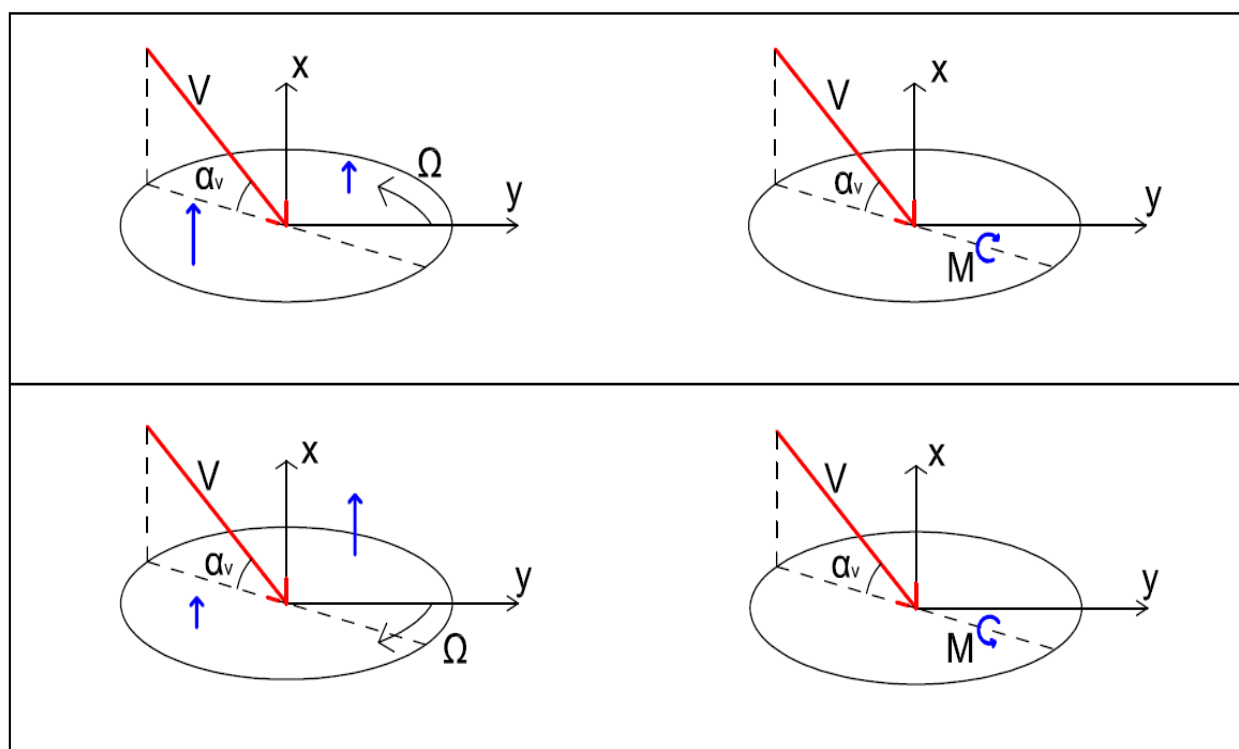


Figura 4.7

#### 4.2.5 Implementación del modelo

Para terminar con el apartado 4.2 referente a la modelización del rotor se explica a continuación cómo se ha implementado el modelo desde el punto de vista del cálculo de las variables de salida.

El rotor se modela a partir de las características atmosféricas y constructivas de pala. Estas variables recogen las hipótesis explicadas en los apartados precedentes y se introducen a través del software de modelización del rotor.

Pero el cálculo de las variables de salida necesita que el usuario del software introduzca las variables para el cálculo. La introducción de estas variables permite establecer las dimensiones de las matrices que contienen la información de salida.

El régimen de vuelo axial quedaba definido cuando se conocían las variables para el cálculo  $V$  y  $\Omega$ , pero para el vuelo de avance era necesario conocer también la variable  $\alpha_v$ . Ahora bien, este análisis no toma en consideración cuál es la orientación del rotor respecto del suelo (es decir respecto a unos ejes fijos). La Figura 4.8 muestra una situación general: el rotor, bajo unas condiciones  $(V, \Omega, \alpha_v)$  y con una determinada orientación respecto al suelo.

Sin embargo, para el cálculo aerodinámico que permite obtener las *Cartas de navegación* es irrelevante cómo está orientado el rotor respecto del suelo, lo cual facilita mucho el procedimiento de cálculo. La Figura 4.9 ilustra la situación del rotor. Únicamente las variables para el cálculo determinan los valores de salida de las *Cartas de navegación*.

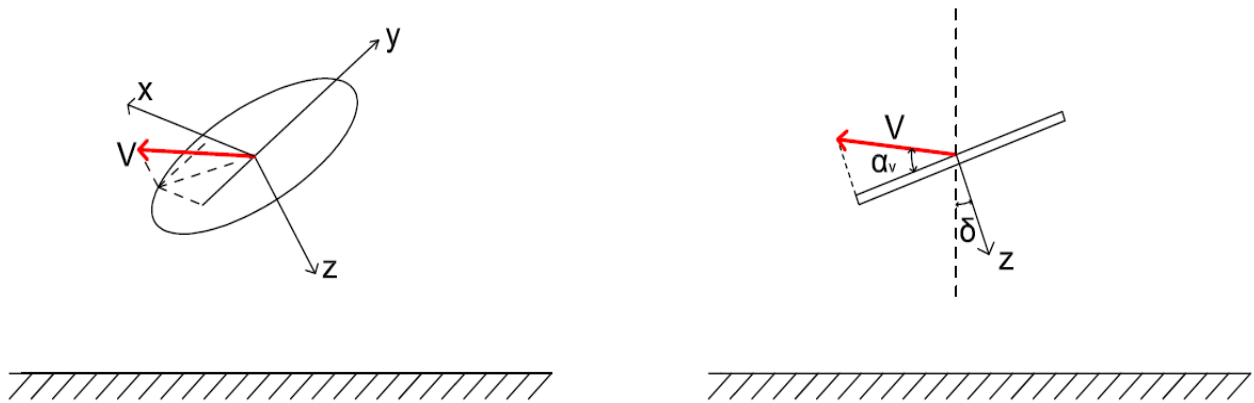


Figura 4.8

Lo que ocurre es que las fuerzas y momentos aerodinámicos se calculan en la base asociada al quadrotor tal y como se explica en el apartado 4.4. De esta forma, la modelización del rotor queda separada del modelo dinámico. Será este último, a través de los respectivos cambios de base, quien se encargará de situar los rotores (el quadrotor en general) respecto del suelo.

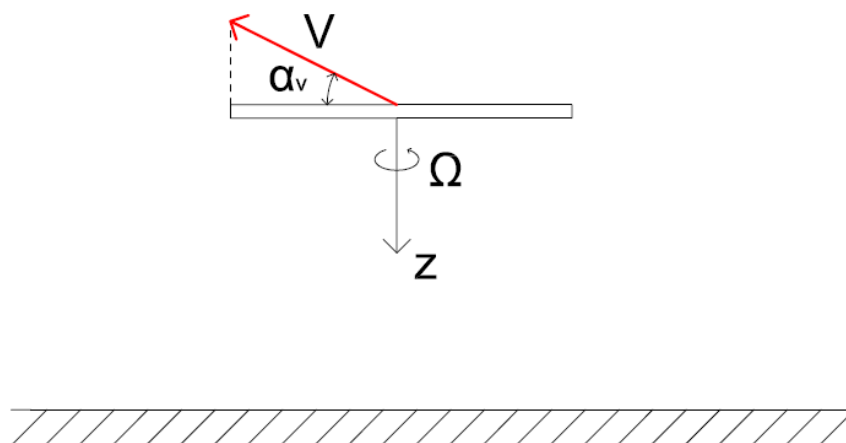


Figura 4.9

Este desacoplamiento entre modelización del rotor y modelo dinámico hace que las variables de entrada a las *Cartas de navegación* sean *sólo* tres, reduciéndose los cálculos que habría que realizar si se considerase la orientación del rotor respecto del suelo.

Además, las *Cartas de navegación* están desacopladas respecto a la orientación del vector velocidad del rotor respecto al aire. Únicamente la inclinación del vector velocidad ( $\alpha_v$ ) se introduce como variable en las matrices, sin importar en absoluto cómo se proyecta dicho vector en los ejes fijos del rotor. Será también durante la simulación del modelo dinámico cuando se tomará en consideración esta proyección.

La Figura 4.10 recoge el planteamiento del problema. Para cada combinación ( $V$ ,  $\Omega$ ,  $\alpha_v$ ) de la matriz, se calcula la fuerza de empuje  $T$ , la fuerza de arrastre  $H$ , el par en el eje motor  $Q$ , el par en el eje de la fuerza de arrastre  $M$ , la potencia total  $P$ , y la situación del régimen de vuelo  $S_{pn}$ .

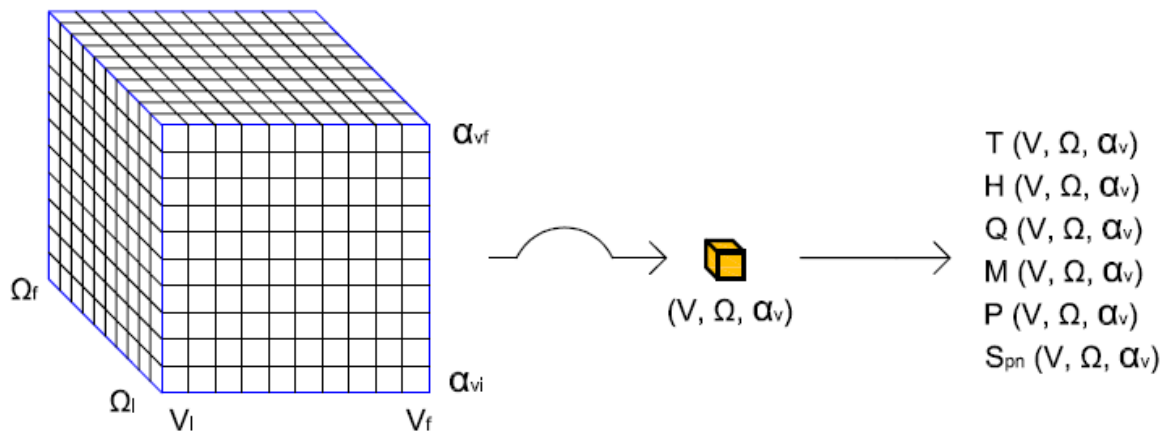


Figura 4.10

El algoritmo de cálculo que se utiliza es el desarrollado para el vuelo de avance. El caso de vuelo axial no se implementa con el objetivo de obtener las *Cartas de navegación*, sino que el proceso de cálculo del vuelo de avance resuelve el caso particular de vuelo axial<sup>14</sup>.

De esta forma el software lee las variables de entrada, definiéndose así un hipotético régimen de vuelo. A continuación resuelve el polinomio de cuarto grado que permite obtener la velocidad inducida para cada elemento diferencial. La pala se divide en  $n$  segmentos a lo largo de su envergadura, y los  $360^\circ$  que forman el giro de la pala se dividen en  $n_\psi$  sectores calculándose este valor a partir de  $n$ :

$$n_\psi = 2n \quad (4.65)$$

En general, a  $2n$  segmentos le corresponden  $2n + 1$  puntos, pero al tratarse de una distribución circular el primer punto ( $0^\circ$ ) y el último ( $360^\circ$ ) coinciden. Por tanto, los puntos de cálculo son también  $2n$ . De esta forma, cada régimen de vuelo  $(V, \Omega, \alpha_v)$  supone resolver el polinomio de cuarto grado  $2n^2 + 2n$  veces. Así, si  $n = 10$ , se obtiene una distribución de velocidad inducida en el rotor dada por 220 valores numéricos. Como puede verse, la cantidad de cálculos que el programa debe realizar es inmenso. Pero es esta forma de proceder la que permite reducir, hasta prácticamente 0, los cálculos aerodinámicos que se realizan durante la simulación en tiempo real. Si se tienen, por ejemplo, los siguientes intervalos de las variables para el cálculo, donde se toman valores enteros para cada variable:

$$V(\text{m/s}) \in [-5..5] \rightarrow 11 \text{ valores}$$

$$\Omega(\text{rad/s}) \in [1..900] \rightarrow 900 \text{ valores}$$

$$\alpha_v(^{\circ}) \in [-90..0] \rightarrow 91 \text{ valores}$$

<sup>14</sup> Resultó útil implementar, en un primer momento el algoritmo que resuelve el problema de vuelo axial. Posteriormente se generalizó el programa para el vuelo de avance comprobando que proporcionaba los mismos resultados para el vuelo axial que el algoritmo específico. Así pues, la solución al problema del vuelo axial se implementa en el software pero únicamente con carácter informativo.

Entonces, para  $n = 10$  debe resolverse la aerodinámica ¡198.198.000 veces! Es decir, el polinomio de cuarto grado es resuelto casi 200 millones de veces.

Para un régimen concreto de vuelo ( $V$ ,  $\Omega$ ,  $\alpha_v$ ) se calcula la velocidad inducida de un elemento diferencial. Posteriormente se obtiene el valor del ángulo de ataque de ese elemento diferencial de pala. Comparando con  $\alpha_{\min}$  y  $\alpha_{\max}$  se establece la situación del régimen  $S_{pn}$ , es decir, si se encuentra en pérdidas o no.

Si se trata de régimen de pérdidas, se asume, desde el punto de vista de cálculo, que dicho elemento diferencial no proporciona sustentación, y por tanto, no proporciona empuje. No obstante, sí que proporciona arrastre y par en el eje motor. Como no proporciona empuje, el momento en el eje del arrastre se toma también 0<sup>15</sup>.

Además, si un elemento diferencial de área se encuentra en pérdidas, la *Carta de navegación*  $S_{pn}$  que indica el estado del régimen ( $V$ ,  $\Omega$ ,  $\alpha_v$ ) toma valor 0, frente al valor 1 que toma cuando el régimen no es de pérdidas.

En general, para un elemento diferencial de área ( $j,i$ ) definido por:

$$j \in [1..(n + 1)]$$

$$i \in [1..n_\psi]$$

y conocido el valor de la velocidad inducida  $v_i(j,i)$  y el del ángulo de ataque  $\alpha(j,i)$  se realizan los siguientes cálculos para determinar las fuerzas y momentos diferenciales de ese elemento.

El empuje diferencial, a partir de (4.41) será:

$$dT \rightarrow T(j,i) = 2R^2 x(j) \rho v_i(j,i) \sqrt{(v_i(j,i) - V \sin \alpha_v)^2 + (V \cos \alpha_v)^2} \left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{2\pi}{n_\psi}\right) \quad (4.66)$$

El par en el eje motor, a partir de (10.62) será:

$$dQ \rightarrow Q(j,i) = \left(\frac{1}{4\pi}\right) b R^2 c(j) \rho (\Omega R x(j) + V \cos \alpha_v \sin \psi(i))^2 c_d(\alpha(j,i)) \left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{2\pi}{n_\psi}\right) x(j) R + \\ + 2R^2 x(j) \rho v_i(j,i) \sqrt{(v_i(j,i) - V \sin \alpha_v)^2 + (V \cos \alpha_v)^2} \left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{2\pi}{n_\psi}\right) \left(\frac{V \sin \alpha_v + v_i(j,i)}{V \cos \alpha_v \sin \psi(i) + \Omega R x(j)}\right) x(j) R \quad (4.67)$$

La fuerza de arrastre, a partir de (10.63) será:

$$dH \rightarrow H(j,i) = \left(\frac{1}{4\pi}\right) b R^2 c(j) \rho (\Omega R x(j) + V \cos \alpha_v \sin \psi(i))^2 c_d(\alpha(j,i)) \left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{2\pi}{n_\psi}\right) \sin \psi(i) + \\ + 2R^2 x(j) \rho v_i(j,i) \sqrt{(v_i(j,i) - V \sin \alpha_v)^2 + (V \cos \alpha_v)^2} \left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{2\pi}{n_\psi}\right) \left(\frac{V \sin \alpha_v + v_i(j,i)}{V \cos \alpha_v \sin \psi(i) + \Omega R x(j)}\right) \sin \psi(i) \quad (4.68)$$

<sup>15</sup> El Capítulo 5 lleva a cabo un análisis de la situación de pérdidas más detallado.

Y el momento en el eje de la fuerza de arrastre, a partir de (10.64) será:

$$dM \rightarrow M(j, i) = 2 R^2 x(j) \rho v_i(j, i) \sqrt{(v_i(j, i) - V \sin \alpha_v)^2 + (V \cos \alpha_v)^2} \left( \frac{1}{n} \right) \left( \frac{2\pi}{n_\psi} \right) x(j) R \sin \psi(i) \quad (4.69)$$

El elemento  $(V, \Omega, \alpha_v)$  de las *Cartas de navegación* de empuje, par en el eje motor, arrastre y par en el eje de la fuerza de arrastre se calcula sumando todos  $2n^2 + 2n$  elementos diferenciales. Además, debe tenerse en cuenta en esta suma que los términos 1 y  $n + 1$  que se corresponden con el encastrado y la punta de la pala deben multiplicarse por 0.5, ya que el elemento diferencial de área en los extremos es la mitad que en el resto, tal y como muestra la Figura 4.11.

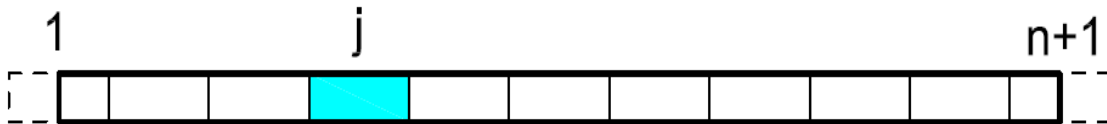


Figura 4.11

Una vez obtenido el elemento de la *Carta de navegación* de par en el eje motor, se obtiene el correspondiente elemento de la matriz de potencia de manera muy sencilla:

$$P(V, \Omega, \alpha_v) = Q(V, \Omega, \alpha_v) \Omega \quad (4.70)$$

El proceso de cálculo termina cuando son rellenas las 6 matrices de tres dimensiones cada una denominadas *Cartas de navegación*. Las operaciones matemáticas pueden llevar horas por lo que el empleo del simulador de vuelo requiere tener, previamente cargado, al menos un modelo de rotor para poder ser utilizado. De otra manera, el usuario del simulador debería esperar al día siguiente para tener un modelo de rotor. Este es el precio que hay que pagar para lograr una simulación en tiempo real con una potente salida gráfica y con precisión en los cálculos aerodinámicos.

## 4.3 Modelo del quadrotor

### 4.3.1 Planteamiento del problema

La modelización del quadrotor se realiza mediante la mecánica de sólido rígido. Las ecuaciones que rigen el comportamiento dinámico del helicóptero son las siguientes<sup>16</sup>:

<sup>16</sup> En el apartado relativo al modelo dinámico se detallan las ecuaciones empleadas. La fórmula introducida en (4.71) tiene como objetivo introducir el problema de la búsqueda de las constantes que se requieren para resolver las ecuaciones dinámicas.



$$\begin{pmatrix} \mathbf{m}_{\text{total}} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{\text{total}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_b \\ \alpha_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_b \times \mathbf{m}_{\text{total}} \mathbf{V}_b \\ \omega_b \times \mathbf{I}_{\text{total}} \omega_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_b \\ \mathbf{M}_b \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

De las ecuaciones anteriores se deduce la necesidad de encontrar tres datos fundamentales. Estos son:

- La masa del quadrotor ( $\mathbf{m}_{\text{total}}$ ).
- La matriz de inercia del quadrotor ( $\mathbf{I}_{\text{total}}$ ).
- La posición del centro de gravedad del quadrotor ( $\mathbf{z}_{\text{cg}}$ ). Debido a la simetría del problema, únicamente es necesario calcular la distancia del centro de gravedad de cada una de las partes del quadrotor al plano **XOY** que se define en el presente capítulo.

La matriz de inercia es función de la geometría del helicóptero, así como de la masa de cada una de las partes (o del material del que esté hecha). Estas partes son:

- Estructura: caja central y brazos.
- Caja de componentes electrónicos.
- Motores.
- Batería.
- Palas que forman el rotor.
- Carga adicional.

Este es, por tanto, el doble objetivo que se pretende en este apartado:

- Establecer un modelo de quadrotor, que pueda ser configurado por el usuario a través del software. Para ello, la primera de las etapas es la definición de las partes que configuran el modelo. Posteriormente se analizan las particularidades de cada parte.
- Una vez establecido el modelo, se computa la masa, la matriz de inercia y la posición del centro de gravedad del quadrotor a partir de la masa, la matriz de inercia y la posición del centro de gravedad de cada parte.

A simple vista, la modelización de las partes del quadrotor parece independiente del modelo aerodinámico del rotor que se ha desarrollado. De hecho, sería deseable que así fuese para simplificar la modelización del quadrotor. Es decir, puede parecer que el cálculo de la masa, matriz de inercia y posición del centro de gravedad no entraña dificultad.

Ahora bien, un estudio más detallado del problema lleva a concluir que la obtención de estos datos está condicionada por la aerodinámica del rotor tal y como se explica a continuación.

En general, cuanto mayor sea el empuje **T** producido por el rotor, mayor potencia **P**, velocidad de giro **Ω** y par **Q** serán necesarios. Este par debe ser aportado por el motor. Por lo tanto, mayores necesidades de empuje y potencia implican la necesidad de colocar un motor más pesado que pueda suministrar la potencia y el par requerido.

De la misma manera, un motor que consume mayor intensidad de corriente  $i$  que otro para producir una mayor potencia mecánica requiere la colocación de una batería de mayores dimensiones y más pesada por lo general. Además, para una misma capacidad de batería medida en mAh, el tiempo de funcionamiento de la batería, y por tanto, el tiempo de funcionamiento del quadrotor, dependerá directamente del consumo de intensidad de corriente. Cuanto mayor sea la demanda de intensidad por parte del motor, mayor par y potencia podrá suministrar este, pero el tiempo de vuelo disminuirá.

De acuerdo a los modelos de quadrotor estudiados en las referencias, la masa de los motores y las baterías contribuye, aproximadamente, al 50 % de la masa total del helicóptero. Y por lo explicado anteriormente, la elección de estos elementos no es trivial, sino que necesita la implementación de unos criterios de selección, tanto para los motores como para la batería, que permitan modelizar fielmente el quadrotor en lo referente a la masa de estas partes y a la capacidad de suministrar potencia y par de los mismos.

A continuación se estudian las distintas partes que conforman el modelo del quadrotor. Para cada una de las partes se detallan las hipótesis tomadas para el modelo, se calcula su masa y su matriz de inercia, así como su posición respecto al sistema de coordenadas  $x, y, z$  asociado al quadrotor tal y como muestra la Figura 4.12. Se puede observar que el eje  $z$  apunta *hacia abajo*, como es habitual en el estudio de helicópteros.

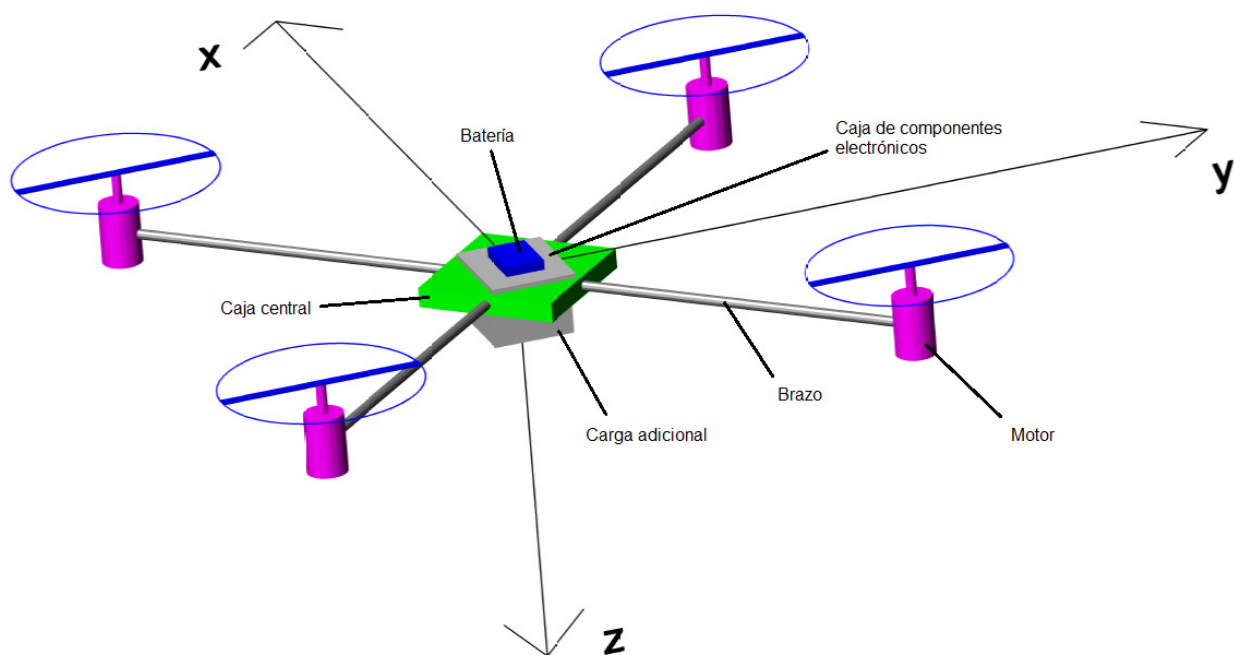


Figura 4.12

#### 4.3.2 Estudio de la estructura: caja central y brazos

La estructura del quadrotor se modela como un prisma rectangular y cuatro barras que forman los brazos.

El prisma forma la llamada caja central. Sus dimensiones son  $L_{ec} \times L_{ec} \times H_{ec}$ , tal y como se muestra en la Figura 4.13.

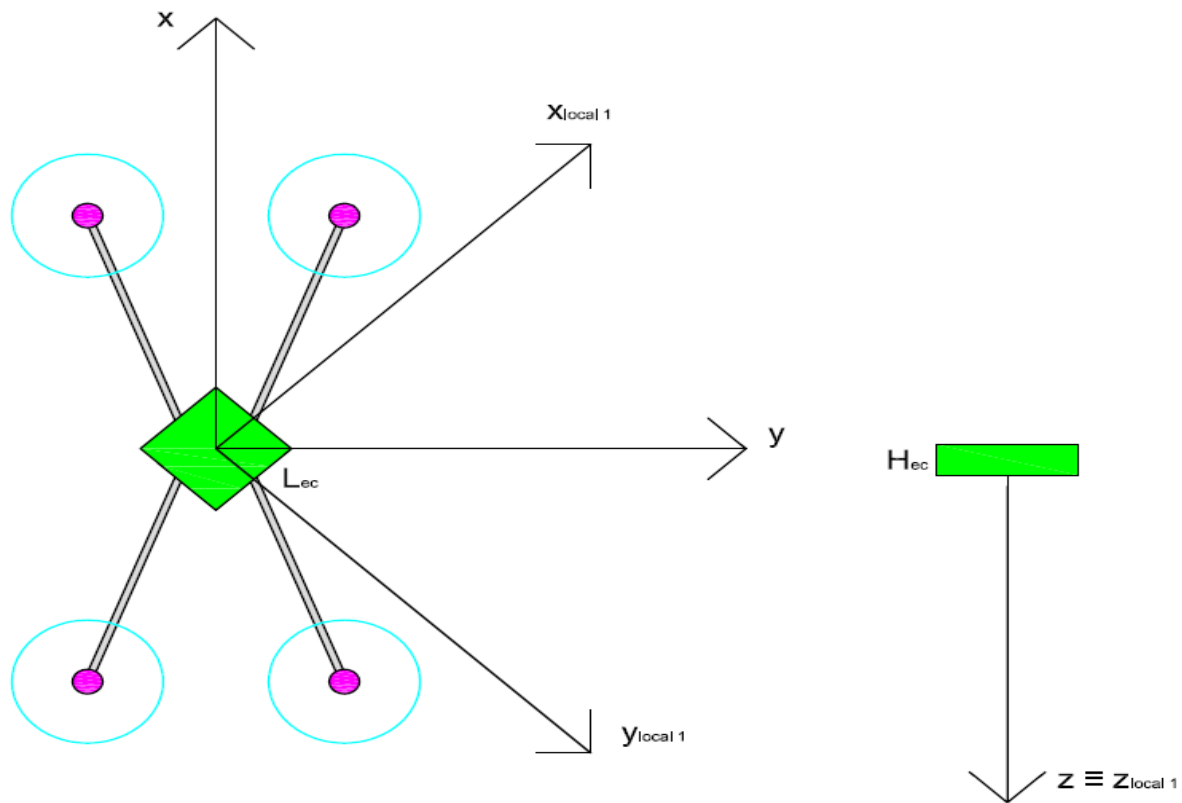


Figura 4.13

Por tanto, dos de las caras del prisma forman un cuadrado de dimensiones  $L_{ec} \times L_{ec}$ . Esta dimensión es configurable por el usuario que modela el quadrotor. La dimensión  $H_{ec}$ , no es configurable, sino que se calcula como 4 veces el radio de las barras que forman los brazos con el objetivo de que el diseño del quadrotor quede lo más proporcionado posible.

Los brazos son cuatro barras idénticas en forma de cilindro de radio  $R_{eb}$  y longitud  $L_{eb}$ . Estos cilindros no son macizos sino que constan de una sección en forma de anillo circular donde el radio interior es la mitad del radio  $R_{eb}$ . Este radio, junto con  $L_{eb}$  son dimensiones configurables por el usuario. Además, también es posible configurar el ángulo de separación entre barras  $\alpha_{cruz}$ , que por defecto es  $90^\circ$ , y el ángulo de inclinación de las barras  $\beta_{cruz}$  respecto al plano horizontal del quadrotor (plano  $XOY$ ), que por defecto es  $0^\circ$ .

Por otro lado, la caja central se modela como un sólido macizo de un material que puede ser elegido a través del software. La elección de dicho material determina la densidad del sólido  $\rho_1$ . No se tienen en cuenta aquí ningún otro aspecto como pueda ser el módulo de elasticidad del material o la constante de Young por tratarse de un modelo como sólido rígido. Por otro lado, también se elige el material de las barras que forman la estructura, determinándose así la densidad  $\rho_2$ .

La base de datos de materiales que se ha almacenado contiene la siguiente información<sup>17</sup>:

<sup>17</sup> Futuras versiones del software podrían tener almacenados más materiales, pero se han escogido estos cinco por tener una muestra representativa de diversos tipos de materiales: metálicos (Aluminio y Magnesio), compuestos (Fibra de Carbono) y plásticos (Polipropileno y PVC).

- Aluminio:  $\rho = 2698.4 \text{ Kg/m}^3$ .
- Magnesio:  $\rho = 1738 \text{ Kg/m}^3$ .
- Fibra de Carbono:  $\rho = 1750 \text{ Kg/m}^3$ .
- Polipropileno:  $\rho = 850 \text{ Kg/m}^3$ .
- PVC:  $\rho = 1400 \text{ Kg/m}^3$ .

Así pues, el cálculo de la masa de la caja central se realiza de la siguiente forma:

$$m_{\text{local } 1} = \rho_1 L_{\text{ec}}^2 H_{\text{ec}} \quad (4.72)$$

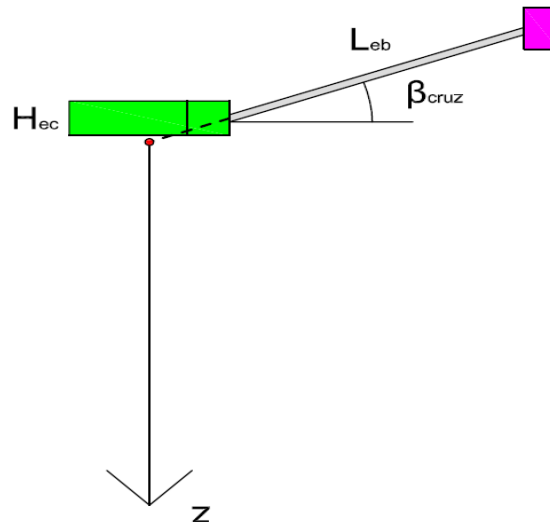
La masa de una cualquiera de las barras es:

$$m_{\text{local } 2} = \rho_2 (\pi R_{\text{eb}})^2 L_{\text{eb}} - \rho_2 \left( \pi \frac{R_{\text{eb}}^2}{2} \right) L_{\text{eb}} = \rho_2 \frac{3}{4} (\pi R_{\text{eb}})^2 L_{\text{eb}} \quad (4.73)$$

Por tanto, la masa de toda la estructura es:

$$m_1 = m_{\text{local } 1} + 4 m_{\text{local } 2} = \rho_1 L_{\text{ec}}^2 H_{\text{ec}} + 3 \rho_2 (\pi R_{\text{eb}})^2 L_{\text{eb}} \quad (4.74)$$

Para calcular esta primera matriz de inercia es necesario especificar la posición de los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  que definen la base del quadrotor. El convenio escogido para situar la posición de los ejes toma como referencia la posición de las barras respecto a la caja central tal y como se muestra en la siguiente figura.



**Figura 4.14**

Se calcula a continuación la matriz de inercia de la caja central. Para ello, se calcula la inercia en los ejes  $x_{\text{local } 1}$ ,  $y_{\text{local } 1}$ ,  $z_{\text{local } 1}$ . El ANEXO B presenta un detallado estudio del cálculo de momentos de inercia de las geometrías empleadas en la modelización del quadrotor.

$$I_{xx \text{ local } 1} = m_{\text{local } 1} \left( \frac{L_{\text{ec}}^2}{12} + \frac{H_{\text{ec}}^2}{12} \right) + m_{\text{local } 1} \left( \frac{L_{\text{ec}}}{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{\text{cruz}}}{2} \right) \tan \beta_{\text{cruz}} \right)^2 \quad (4.75)$$

$$I_{yy \text{ local } 1} = m_{\text{local } 1} \left( \frac{L_{ec}^2}{12} + \frac{H_{ec}^2}{12} \right) + m_{\text{local } 1} \left( \frac{L_{ec}}{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{cruz}}{2} \right) \tan \beta_{cruz} \right)^2 \quad (4.76)$$

$$I_{zz \text{ local } 1} = m_{\text{local } 1} \left( \frac{L_{ec}^2}{12} + \frac{L_{ec}^2}{12} \right) \quad (4.77)$$

Mediante un cambio de base se obtiene la matriz de inercia en los ejes  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  del quadrotor. Esta matriz representa un giro de  $45^\circ$  respecto al eje  $\mathbf{z}$  del quadrotor. Por tanto, la matriz de inercia de la caja central será:

$$I_{\text{local } 1} = \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} & 0 \\ -\cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{xx \text{ local } 1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy \text{ local } 1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz \text{ local } 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi}{4} & -\cos \frac{\pi}{4} & 0 \\ \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

A continuación se estudia una cualquiera de las barras de la estructura. Se calculan los elementos de la diagonal principal de la matriz de inercia de dos cilindros concéntricos, uno de radio  $R_{eb}$  y otro la mitad, teniendo este último una masa negativa y considerando el eje  $\mathbf{z}_{\text{local } 2\_1}$  de uno cualquiera de los cilindros el correspondiente al eje longitudinal. Inicialmente, la matriz de inercia se calcula respecto a los ejes  $\mathbf{x}_{\text{local } 2\_1}$   $\mathbf{y}_{\text{local } 2\_1}$   $\mathbf{z}_{\text{local } 2\_1}$ .

$$I_{xx \text{ local } 2\_1} = \rho_2 (\pi R_{eb})^2 L_{eb} \left( \frac{R_{eb}^2}{4} + \frac{L_{eb}^2}{12} \right) - \rho_2 \left( \pi \frac{R_{eb}}{2} \right)^2 L_{eb} \left( \frac{\left( \frac{R_{eb}}{2} \right)^2}{4} + \frac{L_{eb}^2}{12} \right) \quad (4.79)$$

$$I_{yy \text{ local } 2\_1} = \rho_2 (\pi R_{eb})^2 L_{eb} \left( \frac{R_{eb}^2}{4} + \frac{L_{eb}^2}{12} \right) - \rho_2 \left( \pi \frac{R_{eb}}{2} \right)^2 L_{eb} \left( \frac{\left( \frac{R_{eb}}{2} \right)^2}{4} + \frac{L_{eb}^2}{12} \right) \quad (4.80)$$

$$I_{zz \text{ local } 2\_1} = \rho_2 (\pi R_{eb})^2 L_{eb} \left( \frac{R_{eb}^2}{2} \right) - \rho_2 \left( \pi \frac{R_{eb}}{2} \right)^2 L_{eb} \left( \frac{\left( \frac{R_{eb}}{2} \right)^2}{2} \right) \quad (4.81)$$

La Figura 4.15 ayuda a entender los giros y desplazamientos necesarios para obtener la matriz de inercia en la base  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$ .

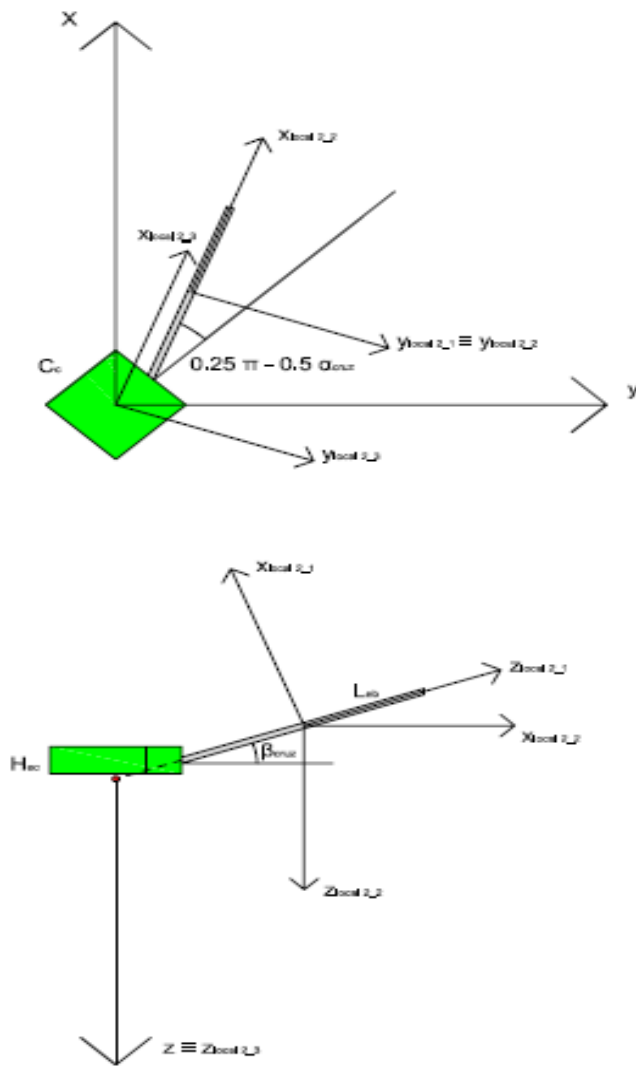


Figura 4.15

Mediante un cambio de base se obtiene la matriz de inercia en la base  $\mathbf{x}_{\text{local } 2\_2} \mathbf{y}_{\text{local } 2\_2} \mathbf{z}_{\text{local } 2\_2}$ .

$$I_{\text{local } 2\_2} = \begin{pmatrix} -\sin \beta_{\text{cruz}} & 0 & -\cos \beta_{\text{cruz}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \beta_{\text{cruz}} & 0 & -\sin \beta_{\text{cruz}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{xx \text{ local } 2\_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy \text{ local } 2\_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz \text{ local } 2\_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \beta_{\text{cruz}} & 0 & \cos \beta_{\text{cruz}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \beta_{\text{cruz}} & 0 & -\sin \beta_{\text{cruz}} \end{pmatrix} \quad (4.82)$$

A continuación se realiza un desplazamiento hasta el origen de los ejes  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ , que también es el origen de los ejes  $\mathbf{x}_{\text{local } 2\_3} \mathbf{y}_{\text{local } 2\_3} \mathbf{z}_{\text{local } 2\_3}$ . Estos últimos tienen la misma orientación que  $\mathbf{x}_{\text{local } 2\_2} \mathbf{y}_{\text{local } 2\_2} \mathbf{z}_{\text{local } 2\_2}$ .

$$I_{xx \text{ local } 2\_3} = I_{xx \text{ local } 2\_2} + m_{\text{local } 2} \left( \frac{L_{ec}}{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{cruz}}{2} \right) \right)^2 +$$

$$+ m_{\text{local } 2} \left( \frac{L_{eb}}{2} \sin \beta_{cruz} + \frac{L_{ec}}{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{cruz}}{2} \right) \operatorname{tg} \beta_{cruz} \right)^2$$

(4.83)

$$I_{yy \text{ local } 2\_3} = I_{yy \text{ local } 2\_2} + m_{\text{local } 2} \left( \frac{L_{eb}}{2} \cos \beta_{cruz} + \frac{L_{ec}}{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{cruz}}{2} \right) \right)^2 +$$

$$+ m_{\text{local } 2} \left( \frac{L_{eb}}{2} \sin \beta_{cruz} + \frac{L_{ec}}{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{cruz}}{2} \right) \operatorname{tg} \beta_{cruz} \right)^2$$

(4.84)

$$I_{zz \text{ local } 2\_3} = I_{zz \text{ local } 2\_2} + m_{\text{local } 2} \left( \frac{L_{eb}}{2} \cos \beta_{cruz} + \frac{L_{ec}}{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{cruz}}{2} \right) \right)^2 +$$

$$+ m_{\text{local } 2} \left( \frac{L_{ec}}{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{cruz}}{2} \right) \right)^2$$

(4.85)

Finalmente, mediante un cambio de base se obtiene la matriz de inercia de una barra en la base  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  asociada al quadrotor. El giro se realiza a través del ángulo  $\alpha_{cruz}$ .

$$I_{\text{local } 2} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha_{cruz}}{2} & \sin \frac{\alpha_{cruz}}{2} & 0 \\ -\sin \frac{\alpha_{cruz}}{2} & \cos \frac{\alpha_{cruz}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} I_{\text{local } 2\_3} \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha_{cruz}}{2} & -\sin \frac{\alpha_{cruz}}{2} & 0 \\ \sin \frac{\alpha_{cruz}}{2} & \cos \frac{\alpha_{cruz}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4.86)

$I_{\text{local } 1}$  es una matriz diagonal, pero  $I_{\text{local } 2}$  se comprueba fácilmente que no lo es. Sin embargo, la simetría que presenta el problema respecto a los ejes  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  del quadrotor sugiere que la matriz de inercia del sistema tenga nulos los productos de inercia. Puede comprobarse que la suma de las matrices de inercia de las cuatro barras da como resultado una matriz diagonal, como era de esperar. Por ello, no es necesario calcular explícitamente la matriz de inercia de cada una de las barras para obtener la matriz de inercia de la estructura (caja central y brazos). Basta con multiplicar por cuatro los elementos de la diagonal principal de  $I_{\text{local } 2}$  y hacer nulos el resto de elementos de la matriz.

$$I_1 = I_{\text{local } 1} + 4 \operatorname{diag} (I_{\text{local } 2}) \quad (4.87)$$

Finalmente se calcula la distancia del centro de gravedad al plano  $\mathbf{XOY}$ . Para la caja central se deduce la siguiente expresión:

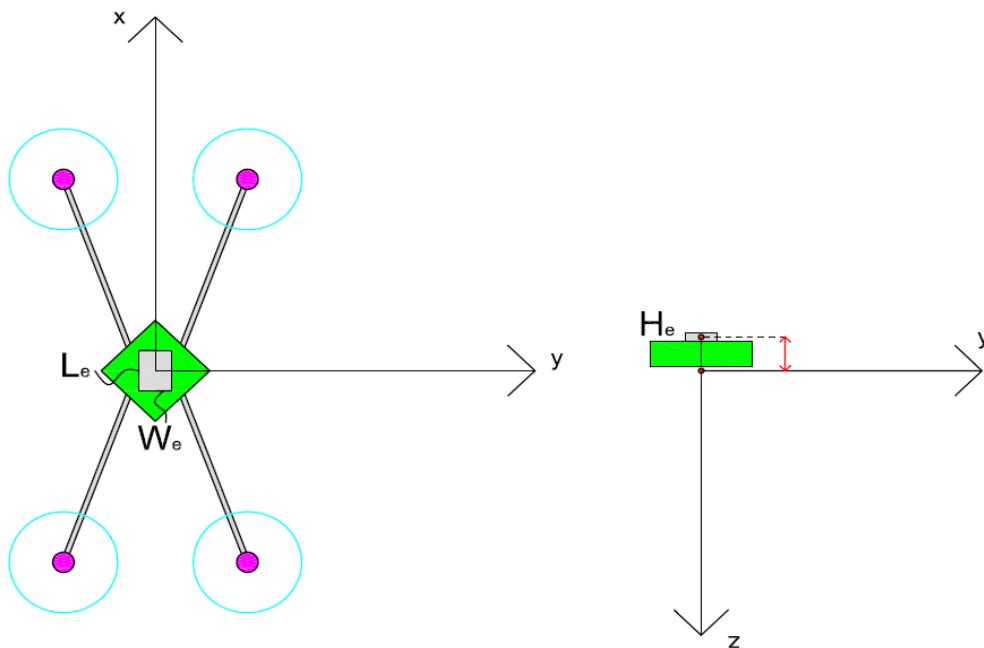
$$z_{\text{local } 1} = \frac{L_{\text{ec}}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{\text{cruz}}}{2}\right) \text{tg } \beta_{\text{cruz}} \quad (4.88)$$

Finalmente, la distancia del centro de gravedad de una cualquiera de las barras al plano XOY es:

$$z_{\text{local } 2} = \frac{L_{\text{ec}}}{2} \text{sen } \beta_{\text{cruz}} + \frac{L_{\text{ec}}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{\text{cruz}}}{2}\right) \text{tg } \beta_{\text{cruz}} \quad (4.89)$$

### 4.3.3 Estudio de la caja de componentes electrónicos

En el modelo también se ha tenido en cuenta la presencia de una caja de componentes electrónicos, cuyo comportamiento a nivel de consumo eléctrico se ha despreciado. El objetivo de este proyecto no es estudiar la electrónica que se implementa en el helicóptero. Simplemente, la caja se modela como un prisma de dimensiones  $L_e \times W_e \times H_e$ , tal y como se muestra en la Figura 4.16. Las tres magnitudes son configurables por el usuario.



**Figura 4.16**

Otro valor característico de la caja de componentes electrónicos es la masa de la misma  $m_2$ . En este caso, la masa no se calcula a partir de otros datos, sino que se requiere que el usuario del software introduzca su valor. El modelo del quadrotor presupone por tanto, que el usuario conoce ya el diseño de la electrónica del helicóptero a simular, desde el punto de vista de las dimensiones y de la masa que requiere.

Para el cálculo de la matriz de inercia se supone que la caja de componentes electrónicos se posiciona por encima de la caja central de la estructura y en contacto con ella. Esta es una hipótesis que se ha tomado. El software no permite implementar diferentes configuraciones de la caja de componentes electrónicos. No obstante, futuras versiones



del programa podrían tener en cuenta este aspecto. Así pues, la diagonal de la matriz de inercia de este elemento se calcula como sigue.

$$I_{xx2} = m_2 \left( \frac{W_e^2}{12} + \frac{H_e^2}{12} \right) + m_2 \left( \frac{H_e}{2} + \frac{H_{ec}}{2} + \frac{L_{ec}}{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{cruz}}{2} \right) \operatorname{tg} \beta_{cruz} \right)^2 \quad (4.90)$$

$$I_{yy2} = m_2 \left( \frac{L_e^2}{12} + \frac{H_e^2}{12} \right) + m_2 \left( \frac{H_e}{2} + \frac{H_{ec}}{2} + \frac{L_{ec}}{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{cruz}}{2} \right) \operatorname{tg} \beta_{cruz} \right)^2 \quad (4.91)$$

$$I_{zz2} = m_2 \left( \frac{L_e^2}{12} + \frac{W_e^2}{12} \right) \quad (4.92)$$

Finalmente, la matriz de inercia será:

$$I_2 = \begin{pmatrix} I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{pmatrix} \quad (4.93)$$

La distancia del centro de gravedad de la caja de componentes electrónicos al plano **XOY** se deduce de la Figura 4.16.

$$z_2 = \frac{H_e}{2} + \frac{H_{ec}}{2} + \frac{L_{ec}}{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{cruz}}{2} \right) \operatorname{tg} \beta_{cruz} \quad (4.94)$$

#### 4.3.4 Estudio de los motores

La selección de un motor adecuado a las características del rotor requiere de un estudio particular.

Como se ha comentado anteriormente, la elección de los motores es una decisión crítica en el diseño. Motores de mayores prestaciones pesan más y por lo tanto el rotor debe ser capaz de proporcionar ese empuje adicional para elevar más peso.

El quadrotor puede volar a muchos regímenes distintos, algunos de los cuales son el despegue, el vuelo a velocidad máxima de rotor, el hover o planeamiento, así como cualquier régimen de transición entre los anteriores.

En este estudio, un motor se diferencia de otro por sus características dimensionales, su masa, su resistencia interna, el valor de su inductancia, así como por sus curvas características. Estas curvas son:

- La curva intensidad frente a par.
- La curva velocidad de giro frente a par.
- La curva eficiencia frente a par.

Por ello, la primera pregunta que se debe contestar para seleccionar el motor adecuado es: ¿para qué régimen de vuelo se desea optimizar la elección del motor? Es decir, se debe conocer qué características de vuelo, principalmente el par, se tiene en el régimen seleccionado.

De todos los regímenes citados, los más interesantes para establecer un criterio de selección del motor son los siguientes:

- Régimen de hover o planeamiento.
- Régimen de velocidad máxima.

Es evidente que una de las maniobras de vuelo más habituales del quadrotor es el planeamiento ya que se trata de un régimen de trabajo muy adecuado para labores de observación por cámara. Por otro lado, el régimen de velocidad máxima de rotor también será utilizado cuando se despegue o cuando se pretende hacer cambios rápidos de posición.

#### 4.3.4.1 Régimen de hover o planeamiento

Optimizar la selección del motor para hover implica conocer el par requerido por el rotor para mantener ese régimen. Suponiendo vuelo axial, las condiciones que se deben cumplir son:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{0} \\ \alpha_v &= -90 \end{aligned} \quad (4.95)$$

Pero, tal y como se estableció en el estudio de la aerodinámica del rotor se debe conocer también la velocidad de giro  $\Omega$  para poder entrar en las *Cartas de navegación*.

Ahora bien, se desconoce cual es la velocidad de giro para hover  $\Omega_{\text{hover}}$ . Lo que sí que se puede calcular es el empuje que debe aportar cada rotor en hover, ya que las únicas fuerzas actuantes sobre el helicóptero serán su propio peso y el empuje aerodinámico. Por tanto, la fuerza de empuje de cada rotor en hover será:

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{m}_{\text{total}} \mathbf{g}}{4} \quad (4.96)$$

En la expresión anterior  $\mathbf{g}$  es la aceleración de la gravedad de valor  $9.81 \text{ m/s}^2$ . Se desprecia aquí la variación de  $\mathbf{g}$  con la altura.  $\mathbf{m}_{\text{total}}$  es la masa total del helicóptero que, en este punto, es desconocida puesto que la modelización del mismo no ha acabado. Por ello, establecer como criterio de selección de los motores el régimen de hover exige estimar el peso del quadrotor. Si el peso estimado no se corresponde con el peso real del mismo una vez elegidos los motores y la batería y modelizados el resto de características el cálculo anterior carece de sentido.

El usuario del software debe introducir la masa estimada  $\mathbf{m}_{\text{sup}}$  del quadrotor, por ejemplo 2

Kg. De esta forma se obtiene una estimación del empuje  $T_{sup}$  que permite calcular la velocidad de giro del rotor  $\Omega$ , que se denomina aquí como  $\Omega_{sup}$ , ya que se conocen dos de las tres entradas de la matriz de empuje y el propio valor de salida. Resulta muy poco probable que el valor de empuje  $T_{sup}$  calculado a través de (4.96) coincida exactamente con un valor proporcionado por la matriz. El cálculo de  $\Omega_{sup}$  implica tomar el valor de empuje de la matriz más próximo a  $T_{sup}$  cumpliendo con las condiciones (4.95)<sup>18</sup>.

Esta velocidad de giro es la necesaria para mantener el hover de un quadrotor de la masa supuesta  $m_{sup}$  y con las características aerodinámicas recogidas en las *Cartas de navegación*. Conocida  $\Omega_{sup}$  se calcula el par  $Q$  para dicho régimen de vuelo a través de la correspondiente *Carta de navegación*, estableciendo como entradas de la matriz la velocidad de giro calculada y las condiciones recogidas en (4.95), es decir  $(0, \Omega_{sup}, 90)$ .

#### 4.3.4.2 Régimen de velocidad máxima

De la misma manera que en el caso anterior, se debe conocer el par que debe aportar el motor para el régimen de vuelo establecido. Suponiendo vuelo axial, las condiciones que se deben cumplir son:

$$\begin{aligned} V &= 0 \\ \alpha_v &= -90 \end{aligned} \quad (4.97)$$

Estas condiciones son las mismas que las que se establecieron para el régimen de hover. La razón por la cual se toma aquí  $V = 0$ , no es porque el quadrotor esté realizando un planeamiento. Es el hecho de que el par  $Q$  es prácticamente independiente de  $V$ , variando únicamente con  $\Omega$ . Se podría tomar, por tanto, otro valor de  $V$ .

En este caso, optimizar la selección de los motores exige estimar cuál es la velocidad de giro máxima a la cual funcionarán los motores, y por tanto, también los rotores. A partir de los tres datos anteriores se calcula el par  $Q$  nuevamente. De la misma manera que en el caso de régimen de hover, la velocidad de giro máxima establecida como criterio de selección de los motores no tiene porqué coincidir con la velocidad de giro máxima del propio motor seleccionado.

#### 4.3.4.3 Elección del motor óptimo

Supongamos en este punto que se conoce ya, para cualquiera de los dos regímenes anteriores, el par y la velocidad de giro de los motores. Se llamara  $Q_{sup}$  a este par, de acuerdo a la notación utilizada en los párrafos anteriores. La segunda pregunta que se debe contestar es: ¿qué se pretende optimizar? Es decir, ¿cuál es el criterio para escoger un motor y desechar otro?

El criterio de selección del motor es aquel que permita aportar el par necesario con el menor consumo de corriente eléctrica. En este punto la potencia mecánica necesaria para dicho régimen se puede calcular fácilmente.

$$P_{mec} = Q_{sup} \Omega \quad (4.98)$$

<sup>18</sup> En lugar de tomar el valor de empuje más próximo, se podría interpolar, pero esta solución carece de mucho sentido al tratarse el empuje calculado en (4.96) de una estimación debido al desconocimiento del valor exacto de la masa del quadrotor.

Por tanto, el motor debe suministrar esta potencia mecánica a partir del consumo de potencia eléctrica que debe ser aportada por la batería. Cuanto menor sea el consumo de corriente de la batería mayor será el tiempo de funcionamiento del helicóptero para el mismo valor de capacidad de la batería. Dado que el tiempo de funcionamiento de los quadrotors no es muy elevado (puede oscilar entre 10 y 20 minutos), minimizar el consumo de corriente es fundamental.

Ahora bien, el criterio anterior no es suficientemente bueno ya que no tiene en cuenta la eficiencia del punto de operación. Un motor A podría consumir menos intensidad de corriente que otro motor B para suministrar el par necesario para alcanzar un régimen de vuelo establecido. Pero si el motor A tiene una eficiencia de conversión de energía eléctrica a energía mecánica muy inferior a la que tiene el motor B, entonces resulta evidente que el motor escogido debería ser el B siempre y cuando el consumo de corriente eléctrica sea aceptable. El usuario deberá introducir el valor de la eficiencia mínima deseada  $\eta_{\min}$  para el régimen de vuelo para el cual se optimiza la selección del motor.

El software de modelización del quadrotor contiene una base de datos de varios motores comerciales. Los modelos de motor almacenados son los siguientes<sup>19</sup>:

- RS 380PH 3270.
- RS 550VC 7525.
- RS 555VC 3754.
- RS 755VC 4540.
- RS 755WC 6522.
- MAXON BRUSHLESS 232241.
- MAXON BRUSHLESS 226006.

La información almacenada para cada motor de la base de datos es la siguiente:

- Curva que relaciona la intensidad de corriente con el par ( $i$  vs  $Q$ ).
- Curva que relaciona la máxima velocidad de giro con el par ( $\Omega_{\max}$  vs  $Q$ ).
- Curva que relaciona la eficiencia con el par<sup>20</sup> ( $\eta$  vs  $Q$ ).
- Masa ( $m_3$ ).
- Radio ( $R_m$ ).
- Altura ( $H_m$ ).
- Inercia ( $J_m$ ).
- Resistencia interna ( $R$ ).
- $K_m$ <sup>21</sup>.
- Voltaje nominal.

La Figura 4.17 muestra las características de un motor de la base de datos tal y como son

<sup>19</sup> La información de los 5 primeros motores se ha obtenido de la página web <http://www.mabuchi-motor.co.jp>. La información de los 2 siguientes de la página web <http://www.maxonmotor.es>.

<sup>20</sup> Para los motores de la marca MAXON no se cuenta con esta información. Las hojas de especificaciones presentan únicamente el valor de eficiencia máxima, que en el caso de ambos motores supera el 80 %. La curva que relaciona la eficiencia con el par se ha tomado constante de valor 0.7, aunque se reconoce que esta aproximación es irreal y debe revisarse en futuras versiones, bien obteniendo la información del fabricante, o bien llevando a cabo un cálculo más riguroso.

<sup>21</sup>  $K_m$  es la constante que al multiplicarla por la intensidad permite obtener el par generado por el motor.

mostradas por el software.

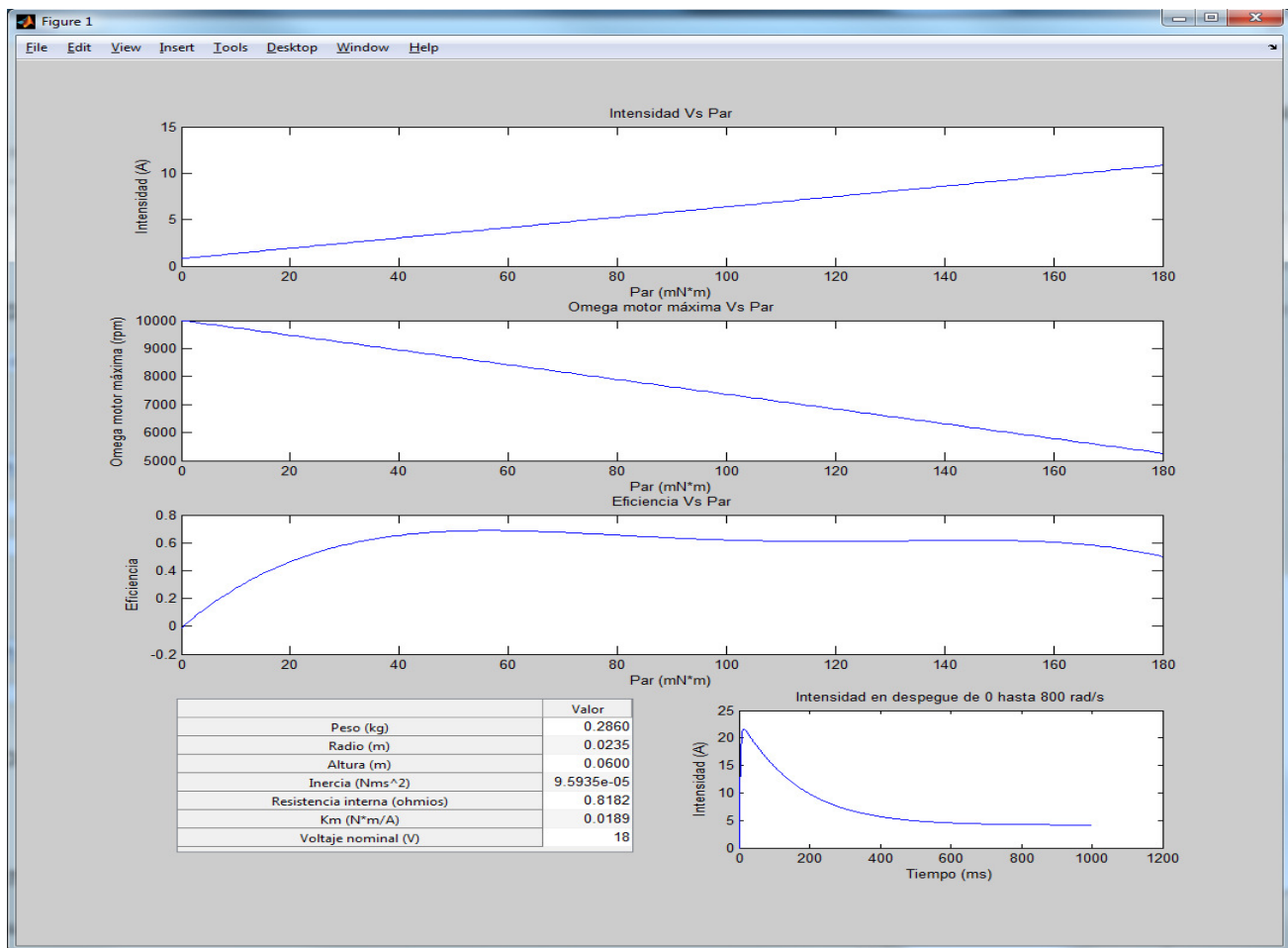


Figura 4.17

El algoritmo de selección del motor evalúa los valores de intensidad, velocidad de giro máxima y eficiencia dadas por las curvas almacenadas tomando como valor de entrada para el par  $Q_{sup}$ . Estos valores serán  $I_{sup}$ ,  $\Omega_{max\ sup}$  y  $\eta_{sup}$ . Entonces, para aquellos motores que cumplen la condición de que  $\Omega_{sup} < \Omega_{max\ sup}$  se toma aquel motor que permite proporcionar el par requerido con el mínimo consumo de corriente eléctrica bajo la condición de que la eficiencia de la conversión de energía eléctrica en mecánica sea mayor que la mínima establecida por el usuario ( $\eta_{sup} > \eta_{min}$ ).

El software no sólo propone el mejor motor de la base de datos según el criterio explicado. Es capaz de proporcionar una lista de motores jerarquizada. El primero de la lista es la elección óptima que hace el programa, el segundo es el siguiente motor *más óptimo*, y así sucesivamente. Ahora bien, todos los motores que aparecen en la lista cumplen los criterios mínimos establecidos por el usuario.

De esta forma, el software de modelización se convierte en una herramienta para el diseño. No obliga a la selección de un determinado motor, pero sí sugiere cuál de ellos es el mejor.

El software proporciona también, para cada motor seleccionado, una curva donde se

simula el comportamiento del motor. Se muestra la intensidad de corriente que circula por el motor cuando el quadrotor despegue, hasta que la velocidad de giro de los motores es  $\Omega_{sup}$ .

#### 4.3.4.4 Masa, matriz de inercia y centro de gravedad de los motores

La masa del motor  $m_3$  queda determinada cuando el usuario del software selecciona uno de los motores comerciales de la base de datos. Cada motor se modela como dos cilindros concéntricos tal y como muestra la Figura 4.18. No obstante, el cálculo de la matriz de inercia, supone establecer la hipótesis de que su geometría es la de un único cilindro de radio  $R_m$  y altura  $H_m$ . Esta simplificación se debe a que el cilindro de menor radio apenas aporta inercia, en comparación con el de radio  $R_m$ . La altura  $L_m$  de este cilindro, sin embargo, sí que se tendrá en consideración<sup>22</sup>, y su valor también es proporcionado en las hojas de especificaciones, al igual que los valores de  $R_m$  y  $H_m$ .

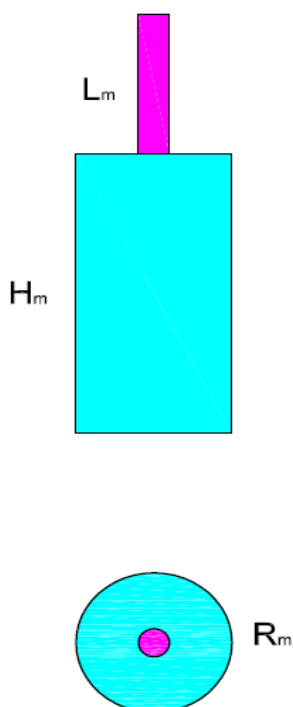


Figura 4.18

La Figura 4.19 muestra un esquema de la situación de los motores en el quadrotor y ayuda a entender el cálculo de la matriz de inercia.

<sup>22</sup> El valor de  $L_m$  se utiliza en el estudio de las palas que forman el rotor, para determinar la matriz de inercia y la distancia del centro de gravedad al plano  $XOY$ .



$$I_{zz\text{ local }3} = m_3 \left( \frac{R_m^2}{2} \right) + m_3 \left( R_m + L_{eb} \cos \beta_{\text{cruz}} + \frac{L_{ec}}{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{\text{cruz}}}{2} \right) \right)^2 +$$

$$+ m_3 \left( \frac{L_{ec}}{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{\text{cruz}}}{2} \right) \right)^2$$

(4.101)

Finalmente se obtiene la matriz de inercia de un motor en los ejes **x**, **y**, **z** de la base del quadrotor mediante la matriz de cambio de base asociada al giro en torno al eje **z**.

$$I_3(\text{un motor}) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha_{\text{cruz}}}{2} & \sin \frac{\alpha_{\text{cruz}}}{2} & 0 \\ -\sin \frac{\alpha_{\text{cruz}}}{2} & \cos \frac{\alpha_{\text{cruz}}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{xx\text{ local }3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy\text{ local }3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz\text{ local }3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha_{\text{cruz}}}{2} & -\sin \frac{\alpha_{\text{cruz}}}{2} & 0 \\ \sin \frac{\alpha_{\text{cruz}}}{2} & \cos \frac{\alpha_{\text{cruz}}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4.102)

Además, de la misma forma que en el caso de las barras, la simetría del problema permite calcular la matriz de inercia de los cuatro motores multiplicando por cuatro los elementos de la diagonal principal de (4.102) y haciendo nulos el resto de elementos.

$$I_3 = 4 \text{ diag } (I_3(\text{un motor})) \quad (4.103)$$

Por otro lado, la distancia del centro de gravedad de uno cualquiera de los motores al plano **XOY** es la siguiente:

$$z_3 = L_{eb} \sin \beta_{\text{cruz}} + \frac{L_{ec}}{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{\text{cruz}}}{2} \right) \text{tg } \beta_{\text{cruz}} \quad (4.104)$$

#### 4.3.5 Estudio de la batería

La selección de la batería que alimenta a los motores del quadrotor requiere también de un estudio particular. De la misma manera que la modelización de las otras partes del quadrotor se ha hecho a partir de la estimación de sus correspondientes dimensiones y masas, la modelización de la batería requiere del conocimiento de estos valores.

Pero, al igual que la modelización de los motores está condicionada por las características del rotor y por las estimaciones hechas para optimizar su elección, la selección de la batería depende del motor seleccionado. Por ello, las características del motor condicionan la baterías escogida, y con ello, sus dimensiones y su masa.

En general, un motor capaz de suministrar más par, y por lo tanto más potencia, tendrá un mayor consumo de intensidad de corriente eléctrica. Como el quadrotor está constituido por cuatro motores idénticos, el helicóptero deberá estar equipado con una batería capaz de suministrar la corriente eléctrica demandada por los motores en cada instante de tiempo.



Especial atención requiere la puesta en funcionamiento de los motores cuando se despegue ya que el consumo de corriente alcanza picos durante un breve periodo de tiempo. La batería debe ser capaz de suministrar corriente eléctrica en esos regímenes transitorios sin quemarse.

#### 4.3.5.1 Elección de la batería óptima

El software permite elegir una batería de la base de datos de forma libre, sin tomar en consideración el motor seleccionado para el quadrotor. Pero existe la posibilidad de seleccionar la batería en función del motor. Los modelos de batería almacenados son los siguientes<sup>23</sup>:

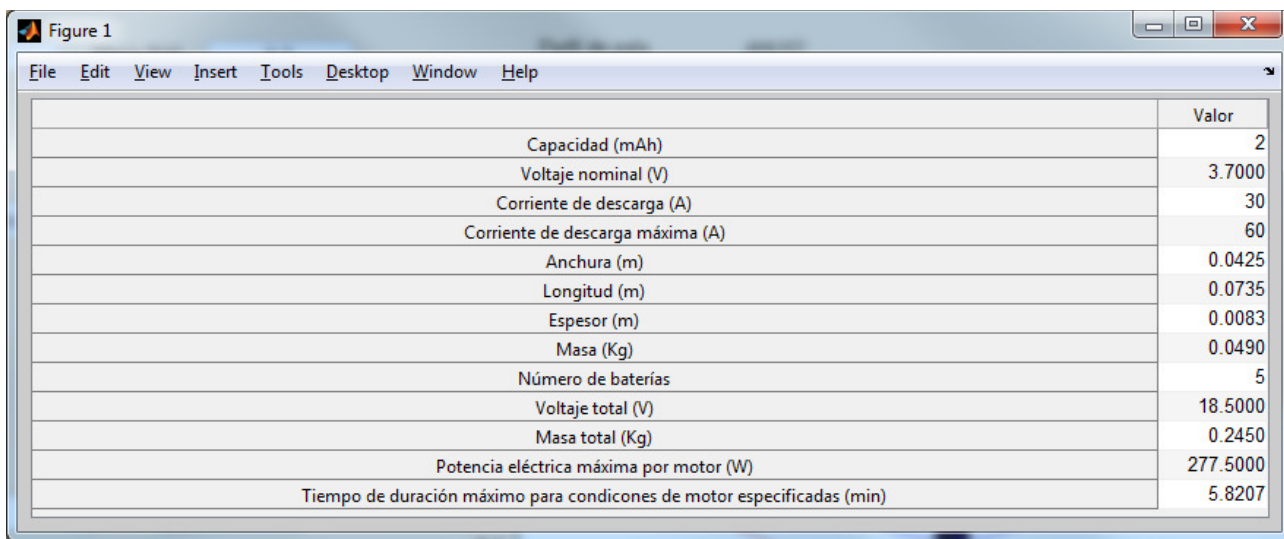
- Kokam 593459H3 (910 mAh).
- Kokam 554374H (1250 mAh).
- Kokam 603870H (1500 mAh).
- Kokam 834374H (2000 mAh).
- Kokam 30205130H (5000 mAh).

La base de datos cuenta con la siguiente información para cada batería:

- Capacidad de la batería en mAh ( $C_{bat}$ ).
- Voltaje nominal de cada celda de la batería.
- Corriente de descarga ( $i_{des}$ ).
- Corriente de descarga máxima ( $i_{des\ max}$ ).
- Anchura ( $L_b$ ).
- Longitud ( $W_b$ ).
- Espesor ( $H_b$ ).
- Masa de cada celda.
- Número de celdas que forman la batería.
- Voltaje total ( $V_{total}$ ).
- Masa total ( $m_4$ ).
- Potencia eléctrica máxima por motor.
- Tiempo de duración máximo para condiciones de motor especificadas.

La Figura 4.20 muestra las características de una batería de la base de datos tal y como son mostradas por el software.

<sup>23</sup> La información de las baterías se ha obtenido de la página web <http://www.dowkokam.com>



|   | Valor    |
|---|----------|
| Capacidad (mAh)   | 2        |
| Voltaje nominal (V)   | 3.7000   |
| Corriente de descarga (A)   | 30       |
| Corriente de descarga máxima (A)  | 60       |
| Anchura (m)   | 0.0425   |
| Longitud (m)  | 0.0735   |
| Espesor (m)   | 0.0083   |
| Masa (Kg)   | 0.0490   |
| Número de baterías  | 5        |
| Voltaje total (V)   | 18.5000  |
| Masa total (Kg)   | 0.2450   |
| Potencia eléctrica máxima por motor (W)                                 | 277.5000 |
| Tiempo de duración máximo para condiciones de motor especificadas (min) | 5.8207   |

Figura 7.20

De los datos mostrados en la Figura 7.20 todos se obtienen de la hoja de características de cada batería, excepto los dos últimos. La potencia eléctrica máxima por motor será:

$$P_{el.max} = V_{total} \frac{i_{des max}}{4} \quad (4.105)$$

El proceso de selección consiste en lo siguiente:

La elección óptima de los motores partía de un par para el cual se pretendía optimizar la selección  $Q_{sup}$ . Así, para este par la curva que relaciona la intensidad de corriente con el par permitía obtener  $i_{sup}$ . De acuerdo con estas hipótesis, la corriente eléctrica que debe suministrar la batería para los cuatro motores será:

$$i_{bat} = 4 i_{sup} \quad (4.106)$$

El criterio de selección de batería implica que ésta pueda suministrar la corriente eléctrica determinada por (4.106). Por tanto, se debe cumplir:

$$i_{des} > i_{bat} \quad (4.107)$$

Esto supone ya descartar algunas de las baterías de la base de datos. Pero la elección de la batería óptima supone que el usuario del software introduzca un dato adicional. Este es el tiempo mínimo de funcionamiento  $t_{min}$  que exige para el quadrotor si este volase al régimen para el cual se ha optimizado la elección del motor. Este valor debe ser introducido en minutos.

El tiempo que tarda la batería en descargarse depende de la capacidad de la batería  $C_{bat}$ . Por eso, el tiempo estimado de duración de la batería  $t_{des}$  se toma:

$$t_{des} = 60 \frac{C_{bat}}{i_{des}} \quad (4.108)$$

Por tanto, se debe cumplir:

$$t_{des} > t_{min} \quad (4.109)$$

El criterio de selección de las baterías toma aquella que cumple (4.107) y (4.109) haciendo mínima  $i_{des}$ . Es decir, se toma aquella batería que es capaz de suministrar el par para el cual se optimiza el motor  $Q_{sup}$  con el mínimo consumo de corriente eléctrica  $i_{des}$ , siempre y cuando la batería tarde más del tiempo mínimo en descargarse.

El criterio anterior no toma en consideración las dimensiones de la batería. Es decir, puede ser que el software sugiera el empleo de una batería concreta. El usuario deberá asegurarse que dicha elección es correcta, de manera que la batería escogida no sea demasiado grande, por ejemplo. Estas y otras características útiles son presentadas tal y como se mencionó anteriormente para que el usuario del software valide la elección. De la misma forma que sucedía para la selección del motor, el software establece un orden de preferencia de las baterías de la base de datos, desde la *más óptima*, la segunda mejor, y así sucesivamente.

El planteamiento anterior no considera las variaciones en la capacidad de la batería cuando esta se descarga. No se pretende aquí establecer unos criterios de selección de motores y baterías de carácter universal y rigurosamente estudiados. Simplemente se ha pretendido establecer unos criterios, más o menos ciertos y correctos, que permitan dar realismo a la modelización del quadrotor. Este estudio de baterías y motores permite un acercamiento más real al problema de la modelización, estableciendo relaciones entre la aerodinámica, la modelización del rotor y la selección y estudio de estos elementos.

#### 4.3.5.2 Masa y matriz de inercia de la batería

Una vez seleccionada la batería comercial de la base de datos, queda determinada su masa  $m_4$  y sus dimensiones. La modelización de la batería toma la geometría de un prisma recto de dimensiones  $L_b \times W_b \times H_b$ . Además, se ha determinado la localización de la batería en el quadrotor, situándose esta justo por encima de la caja de componentes electrónicos. Nuevamente, la localización de este elemento del helicóptero no puede ser modificada por el usuario del software.

La Figura 4.21 muestra dónde se sitúa la batería y se utiliza para calcular la matriz de inercia de este elemento.

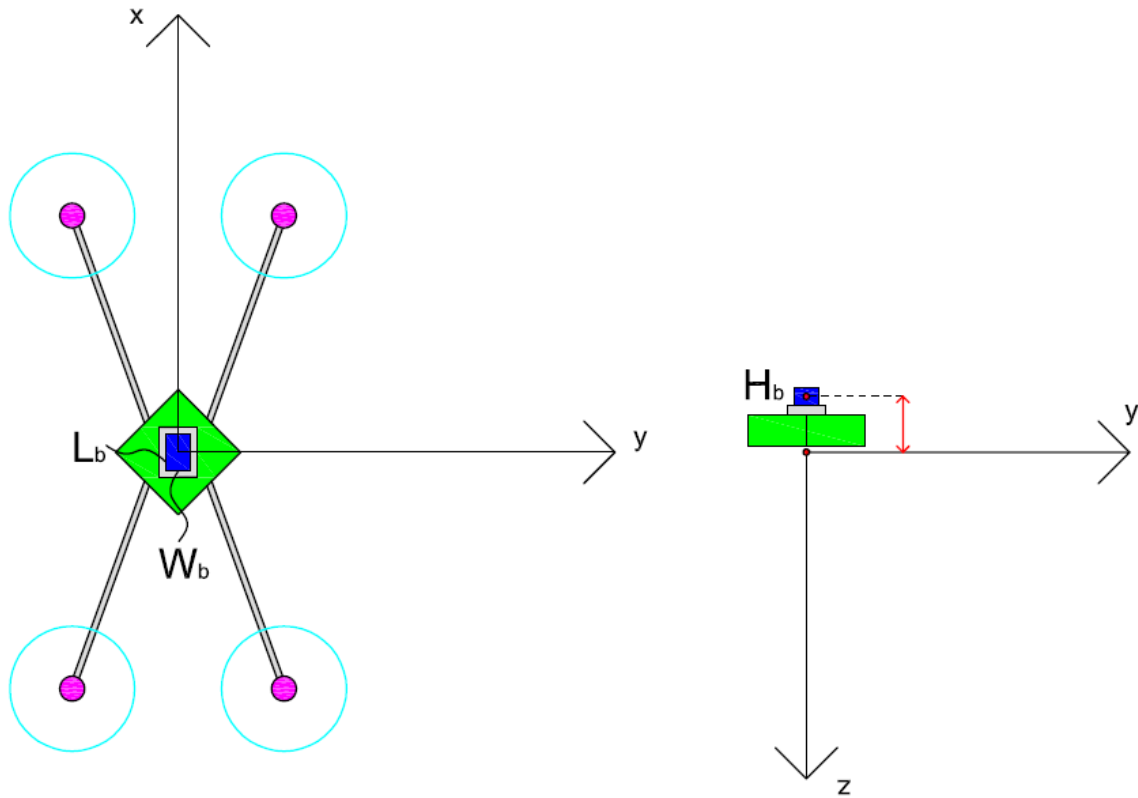


Figura 4.21

De esta forma, los elementos de la diagonal principal de la matriz de inercia son:

$$I_{xx4} = m_4 \left( \frac{W_b^2}{12} + \frac{H_b^2}{12} \right) + m_4 \left( \frac{H_b}{2} + H_e + \frac{H_{ec}}{2} + \frac{L_{ec}}{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{cruz}}{2} \right) \operatorname{tg} \beta_{cruz} \right)^2 \quad (4.110)$$

$$I_{yy4} = m_4 \left( \frac{L_b^2}{12} + \frac{H_b^2}{12} \right) + m_4 \left( \frac{H_b}{2} + H_e + \frac{H_{ec}}{2} + \frac{L_{ec}}{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{cruz}}{2} \right) \operatorname{tg} \beta_{cruz} \right)^2 \quad (4.111)$$

$$I_{zz4} = m_4 \left( \frac{L_b^2}{12} + \frac{W_b^2}{12} \right) \quad (4.112)$$

Finalmente, la matriz de inercia será:

$$I_4 = \begin{pmatrix} I_{xx4} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy4} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz4} \end{pmatrix} \quad (4.113)$$

La distancia del centro de gravedad de la batería al plano **XOY** viene dada por la siguiente expresión:

$$z_4 = \frac{H_b}{2} + H_e + \frac{H_{ec}}{2} + \frac{L_{ec}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{cruz}}{2}\right) \operatorname{tg} \beta_{cruz} \quad (4.114)$$

#### 4.3.6 Estudio de las palas que forman el rotor

La modelización del quadrotor consta de una parte que ya se estudió en el apartado 4.2. Son las palas que forman el rotor. A pesar de la indudable importancia que tienen en el diseño del quadrotor, su relevancia es mucho menor en lo referente a la contribución que suponen en la masa y en la matriz de inercia finales del sistema. Es decir, el peso de las palas es prácticamente despreciable con respecto al resto de los elementos del helicóptero. Además, su influencia en la localización del centro de gravedad final también es poco importante.

A pesar de estas consideraciones, se ha decidido llevar a cabo el cómputo de las constantes, al igual que se ha hecho con la estructura, la caja de componentes electrónicos, los motores y la batería. La razón ha sido la siguiente. Se ha preferido completar el modelo del quadrotor con este estudio antes que despreciarlo, ya que además, la adición de estas operaciones apenas supone coste computacional. Por otro lado, futuros trabajos podrían dedicarse al estudio de la influencia de las palas en la masa, la matriz de inercia y el centro de gravedad. Por ello, se ha pretendido iniciar este trabajo planteando los cálculos y siguiendo de esta forma el estudio realizado en la referencia [8].

El usuario debe seleccionar un material para la pala, determinándose así la densidad  $\rho_5$ . Para calcular la masa se multiplica la densidad por el volumen de pala. Este último se obtiene aproximadamente a partir de la siguiente expresión:

$$V_{palas} = b \frac{R_{ext} - R_{int}}{n} \sum_{i=1}^{n+1} A_p c(i) \quad (4.115)$$

En la expresión anterior  $A_p$  es el área de la sección transversal de una pala que tiene cuerda unitaria. Este valor se obtiene de una gráfica del perfil. Por ejemplo, para el perfil ANUX2 de la base de datos del software se introdujeron los puntos que definen su contorno en el programa Auto-Cad y se obtuvo el área encerrada por ese contorno. Debe quedar claro que la expresión (4.115) realiza un cálculo aproximado. La Tabla 4.1 que resumía el conjunto de variables de entrada y salida del problema de modelización del rotor ya introdujo este concepto, aunque no es utilizado para la aerodinámica, sino para la modelización del quadrotor. Lo mismo puede decirse de la variable  $h_p$ , espesor unitario del perfil, que se emplea para el cálculo de la matriz de inercia.

La masa del conjunto de palas de uno de los rotores será:

$$m_5 = \rho_5 V_{palas} \quad (4.116)$$

También se calcula la altura  $H_p$ , que es una estimación del espesor de la pala obtenido a partir de la siguiente expresión:

$$H_p = h_p \frac{c(1) + c(n+1)}{2} \quad (4.117)$$

La fórmula anterior permite obtener un valor de espesor medio de pala utilizando el espesor para cuerda unitaria  $h_p$  (obtenido también para el perfil ANUX2 a través de Auto-Cad) y la media de los valores de cuerda en los extremos (encastre  $c(1)$  y punta de pala  $c(n+1)$ ).

La modelización de las palas sigue la hipótesis tomada en la referencia [8] en la cual se toman estas como un cilindro de radio  $R_{ext}$  y altura  $H_p$ , pero de densidad variable con el radio. Estas consideraciones se toman por el hecho de tener las palas girando y porque la densidad depende del radio, decreciendo esta a medida que uno se aleja del centro.

La Figura 4.22 muestra la situación del cilindro en el quadrotor.

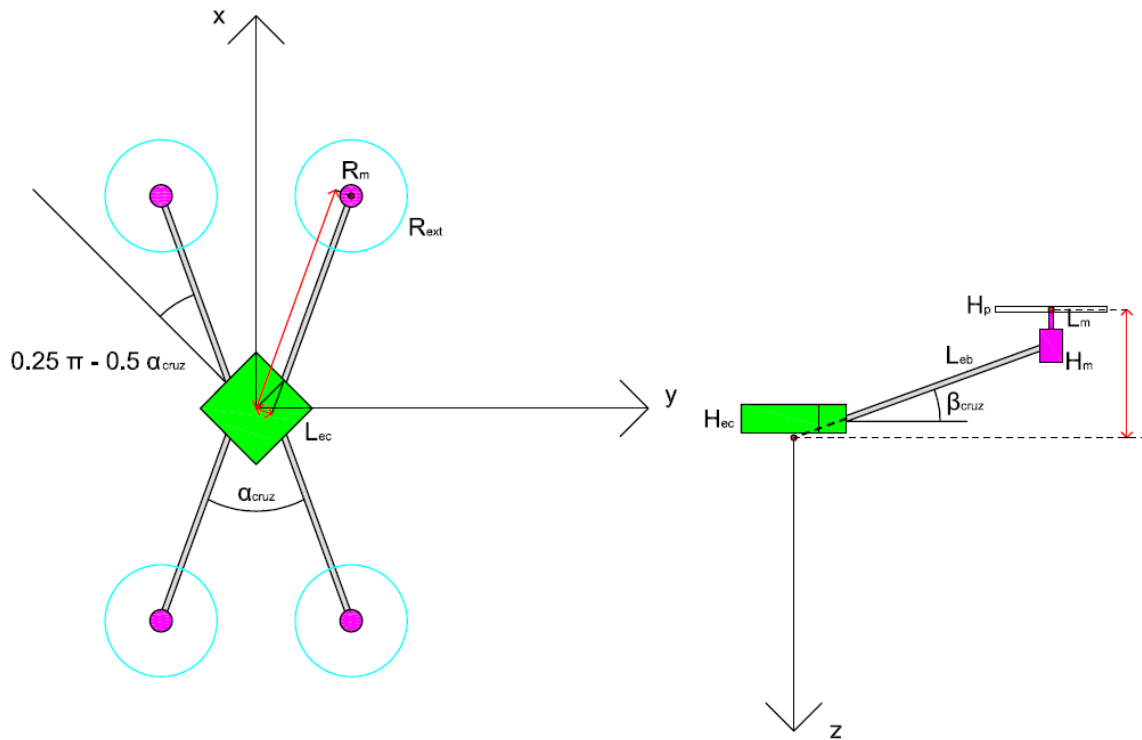


Figura 4.22

Así pues, se realiza el cálculo de los elementos de la diagonal principal de la matriz de inercia en los ejes  $x_{local5}$ ,  $y_{local5}$ ,  $z_{local5}$ .

$$I_{xx_{local5}} = m_5 \left( \frac{R_{ext}^2}{6} + \frac{H_p^2}{12} \right) + m_5 \left( \frac{L_{ec}}{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{cruz}}{2} \right) \right)^2 +$$

$$+ m_5 \left( \frac{H_p}{2} + L_m + \frac{H_m}{2} + L_{ab} \sin \beta_{cruz} + \frac{L_{ec}}{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{cruz}}{2} \right) \tan \beta_{cruz} \right)^2$$

(4.118)

$$\begin{aligned}
I_{yy\text{local } 5} = & m_5 \left( \frac{R_{\text{ext}}^2}{6} + \frac{H_p^2}{12} \right) + m_5 \left( R_m + L_{\text{eb}} \cos \beta_{\text{cruz}} + \frac{L_{\text{ec}}}{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{\text{cruz}}}{2} \right) \right)^2 + \\
& + m_5 \left( \frac{H_p}{2} + L_m + \frac{H_m}{2} + L_{\text{eb}} \sin \beta_{\text{cruz}} + \frac{L_{\text{ec}}}{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{\text{cruz}}}{2} \right) \tan \beta_{\text{cruz}} \right)^2
\end{aligned}
\quad (4.119)$$

$$\begin{aligned}
I_{zz\text{local } 5} = & m_5 \left( \frac{R_{\text{ext}}^2}{3} \right) + m_5 \left( R_m + L_{\text{eb}} \cos \beta_{\text{cruz}} + \frac{L_{\text{ec}}}{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{\text{cruz}}}{2} \right) \right)^2 + \\
& + m_5 \left( \frac{L_{\text{ec}}}{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{\text{cruz}}}{2} \right) \right)^2
\end{aligned}
\quad (4.120)$$

Finalmente se obtiene la matriz de inercia de un motor en los ejes **x**, **y**, **z** de la base del quadrotor mediante la matriz de cambio de base asociada al giro en torno al eje **z**.

$$I_5 (\text{un conj. palas}) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha_{\text{cruz}}}{2} & \sin \frac{\alpha_{\text{cruz}}}{2} & 0 \\ -\sin \frac{\alpha_{\text{cruz}}}{2} & \cos \frac{\alpha_{\text{cruz}}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{xx\text{local } 5} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy\text{local } 5} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz\text{local } 5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha_{\text{cruz}}}{2} & -\sin \frac{\alpha_{\text{cruz}}}{2} & 0 \\ \sin \frac{\alpha_{\text{cruz}}}{2} & \cos \frac{\alpha_{\text{cruz}}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\quad (4.121)$$

La simetría del problema permite calcular la matriz de inercia de los cuatro conjuntos de palas multiplicando por cuatro los elementos de la diagonal principal de (4.121) y haciendo nulos el resto de elementos.

$$I_5 = 4 \text{ diag } (I_5 (\text{un conj. palas})) \quad (4.122)$$

Por otro lado, la distancia del centro de gravedad al plano **XOY** es la siguiente:

$$z_5 = \frac{H_p}{2} + L_m + \frac{H_m}{2} + L_{\text{eb}} \sin \beta_{\text{cruz}} + \frac{L_{\text{ec}}}{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{\text{cruz}}}{2} \right) \tan \beta_{\text{cruz}} \quad (4.123)$$

#### 4.3.7 Estudio de una carga adicional

El proceso de modelización del quadrotor concluye con el estudio de una carga adicional al vehículo aéreo. Tal y como se explicó en el Capítulo 2, es frecuente que los UAV estén equipados con una cámara para realizar las labores de vigilancia, observación del terreno, etc.. La modelización de una carga adicional tiene como objetivo tener en cuenta la adición de masa que supone añadir estas cámaras.

El software otorga al usuario la posibilidad de añadir al helicóptero una carga adicional o

no. Este debe introducir el valor de la masa  $m_6$ , así como las dimensiones de la carga  $L_c \times W_c \times H_c$ , suponiendo que esta se modela como un prisma recto.

La localización de la carga se sitúa por debajo de la caja central de la estructura tal y como muestra la Figura 4.23, porque resulta habitual que las cámaras se añadan en esta parte para poder visualizar el terreno durante el vuelo del helicóptero.

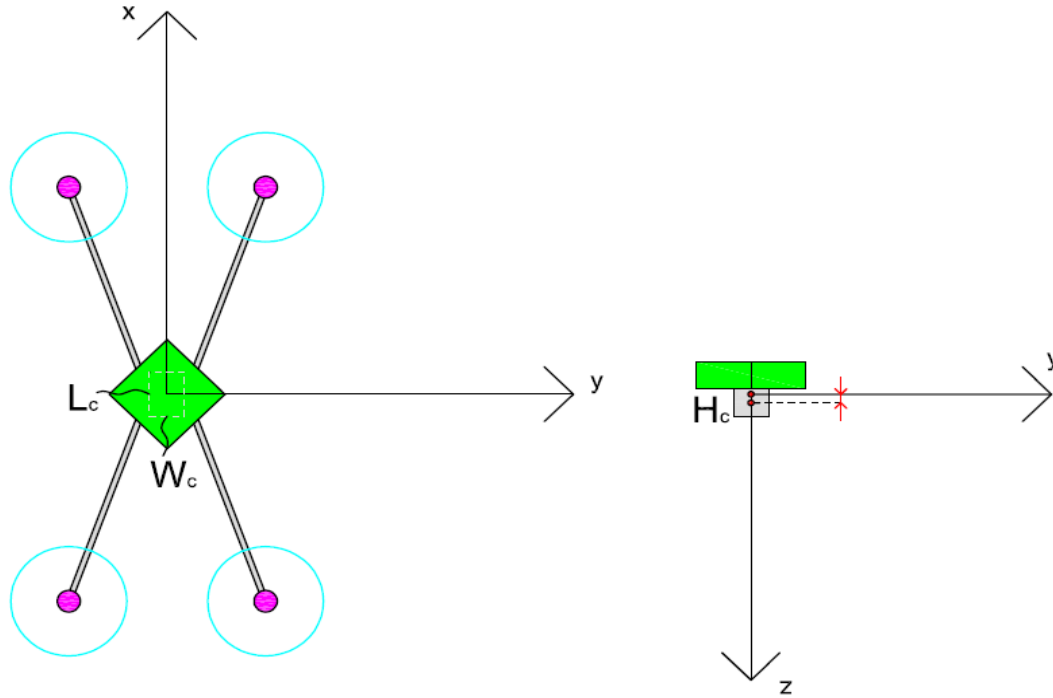


Figura 4.23

De esta forma, los elementos de la diagonal principal de la matriz de inercia son:

$$I_{xx6} = m_6 \left( \frac{W_c^2}{12} + \frac{H_c^2}{12} \right) + m_6 \left( \frac{H_c}{2} + \frac{H_{ec}}{2} - \frac{L_{ec}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{cruz}}{2}\right) \operatorname{tg} \beta_{cruz} \right)^2$$

(4.124)

$$I_{yy6} = m_6 \left( \frac{L_c^2}{12} + \frac{H_c^2}{12} \right) + m_6 \left( \frac{H_c}{2} + \frac{H_{ec}}{2} - \frac{L_{ec}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{cruz}}{2}\right) \operatorname{tg} \beta_{cruz} \right)^2$$

(4.125)

$$I_{zz6} = m_6 \left( \frac{L_c^2}{12} + \frac{W_c^2}{12} \right) \quad (4.126)$$

Finalmente, la matriz de inercia será:



$$\mathbf{I}_6 = \begin{pmatrix} I_{xx6} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy6} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz6} \end{pmatrix} \quad (4.127)$$

Por otro lado, la distancia del centro de gravedad al plano **XOY** es la siguiente:

$$z_6 = \frac{H_c}{2} + \frac{H_{ec}}{2} - \frac{L_{ec}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{cruz}}{2}\right) \operatorname{tg} \beta_{cruz} \quad (4.128)$$

#### 4.3.8 Determinación final de las constantes del quadrotor

Una vez que se han estudiado las diferentes partes por separado, se procede a calcular la masa  $\mathbf{m}_{total}$ , la matriz de inercia  $\mathbf{I}_{total}$  y la posición del centro de gravedad  $\mathbf{z}_{cg}$  del helicóptero. Tal y como se comentó al comienzo del apartado 4.3, este es el objetivo de la modelización del quadrotor.

La masa total se computa a partir de la suma de la masa de las partes:

$$\mathbf{m}_{total} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + 4 \mathbf{m}_3 + \mathbf{m}_4 + 4 \mathbf{m}_5 + \mathbf{m}_6 \quad (4.129)$$

En la expresión anterior,  $\mathbf{m}_3$  y  $\mathbf{m}_5$  se multiplican por cuatro porque  $\mathbf{m}_3$  computa la masa de un único motor, y  $\mathbf{m}_5$  la de un único conjunto de palas.

La matriz de inercia total se computa también a partir de la suma de la inercia de las partes.

$$\mathbf{I}_{total\ xyz} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 + \mathbf{I}_4 + \mathbf{I}_5 + \mathbf{I}_6 \quad (4.130)$$

$\mathbf{I}_{total\ xyz}$  es una matriz diagonal, donde los términos correspondientes a los productos de inercia son nulos. Esto permite que el modelo dinámico sea más sencillo, teniendo desacoplada la aceleración angular en torno a cada eje con los momentos en los otros dos ejes.

Finalmente, se calcula la posición del centro de gravedad final. Para ello se toma cada masa como puntual y situada a la distancia  $\mathbf{z}_i$  respecto a los ejes  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$ .

$$\mathbf{z}_{cg} = \frac{-\mathbf{m}_{local\ 1} \mathbf{z}_{local\ 1} - \mathbf{m}_{local\ 2} \mathbf{z}_{local\ 2} - 4 \mathbf{m}_3 \mathbf{z}_3 - \mathbf{m}_4 \mathbf{z}_4 - 4 \mathbf{m}_5 \mathbf{z}_5 + \mathbf{m}_6 \mathbf{z}_6}{\mathbf{m}_{total}} \quad (4.131)$$

Tal y como puede verse en la Figura 4.24, el origen del sistema de coordenadas  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  no coincide, en general, con el centro de gravedad del sistema. Las ecuaciones que rigen el comportamiento dinámico del helicóptero dadas por la expresión (4.71) se van a plantear en un sistema de coordenadas asociado al quadrotor, como  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$ , pero cuyo origen coincide con el centro de gravedad del sistema. Esta base se denota  $\mathbf{x}_b$ ,  $\mathbf{y}_b$ ,  $\mathbf{z}_b$ .

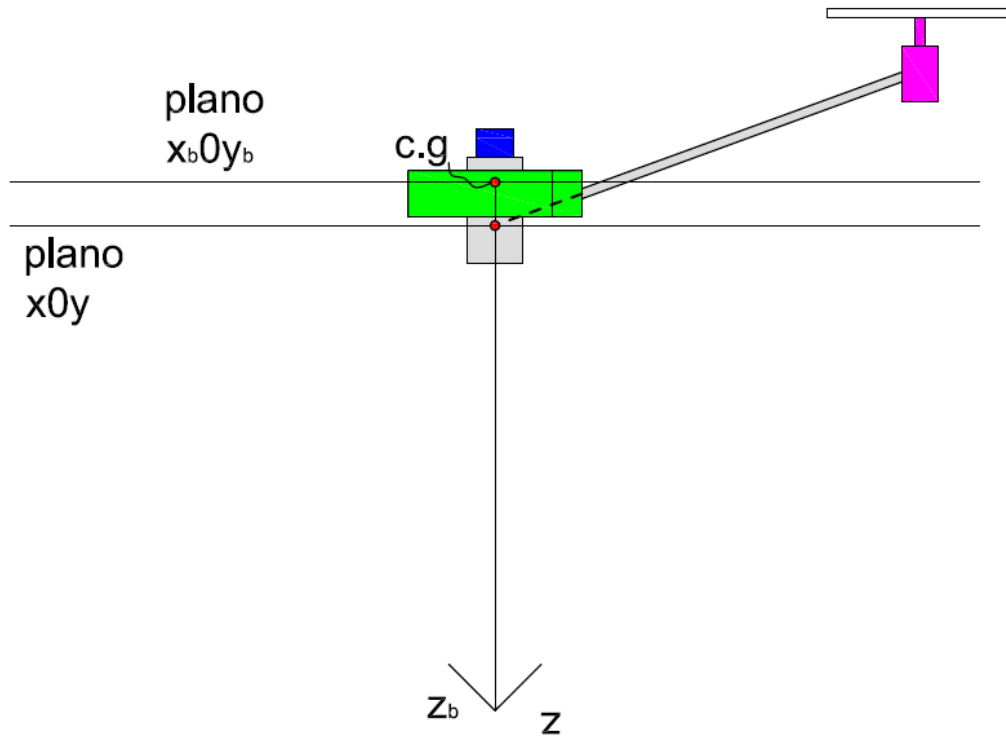


Figura 4.24

Por tanto, la matriz de inercia del sistema  $I_{total\ xyz}$  debe ser trasladada utilizando el teorema de Steiner, para obtener la matriz que será utilizada durante las simulaciones  $I_{total}$ .

$$I_{total} (1, 1) = I_{total\ xyz} (1, 1) - m_{total} z_{cg}^2 \quad (4.132)$$

$$I_{total} (2, 2) = I_{total\ xyz} (2, 2) - m_{total} z_{cg}^2 \quad (4.133)$$

$$I_{total} (3, 3) = I_{total\ xyz} (3, 3) \quad (4.134)$$

Por otro lado, y para terminar con el apartado de la modelización del quadrotor, se definen a su vez otras constantes que resultan útiles para la resolución del modelo dinámico. Estos parámetros serán también almacenados por el software de manera que el modelo dinámico no realice operaciones matemáticas superfluas.

Una de ellas es el vector de superficie del quadrotor  $A_b$  vista según los ejes  $x_b$   $y_b$   $z_b$  de la base del quadrotor. Sea, por tanto  $A_b$ :

$$A_b = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}_b \quad (4.135)$$

Las componentes se calculan de la siguiente manera:

$$A_x|_b = 2 L_{ec} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) H_{ec} + W_e H_e + W_b H_b + W_c H_c + 4 R_m H_m + 4 R_{eb} L_{eb} \sin\left(\frac{\alpha_{cruz}}{2}\right) \quad (4.136)$$

$$A_y|_b = 2 L_{ec} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) H_{ec} + L_e H_e + L_b H_b + L_c H_c + 4 R_m H_m + 4 R_{eb} L_{eb} \cos\left(\frac{\alpha_{cruz}}{2}\right) \quad (4.137)$$

$$A_z|_b = L_{ec}^2 + 4 \pi R_m^2 + 8 R_{ec} L_{ec} \cos \beta_{cruz} \quad (4.138)$$

El cálculo de  $A_b$  resulta útil para la implementación de la fuerza de rozamiento del quadrotor con el aire que se explica en el apartado 4.4.

Otros parámetros necesarios son los llamados brazos, que miden la distancia que existe en los ejes  $x_b$ ,  $y_b$ ,  $z_b$  desde el centro de uno cualquiera de los rotores, hasta el origen de coordenadas (coincidente con el centro de gravedad). Estos brazos son:

$$b_x = R_m + L_{eb} \cos \beta_{cruz} \cos\left(\frac{\alpha_{cruz}}{2}\right) + \frac{L_{ec}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad (4.139)$$

$$b_y = R_m + L_{eb} \cos \beta_{cruz} \sin\left(\frac{\alpha_{cruz}}{2}\right) + \frac{L_{ec}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad (4.140)$$

$$b_z = \frac{H_p}{2} + L_m + \frac{H_m}{2} + L_{eb} \sin \beta_{cruz} + \frac{L_{ec}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_{cruz}}{2}\right) \operatorname{tg} \beta_{cruz} + z_{cg} \quad (4.141)$$

Estas expresiones resultan útiles para el cálculo de los momentos actuantes sobre el quadrotor.

Por otro lado, la inercia  $J_m$ , que se introdujo en el apartado 4.3.4.3, mide la resistencia al giro de los rotores y se computa a partir de la modelización de los motores y las palas como sigue:

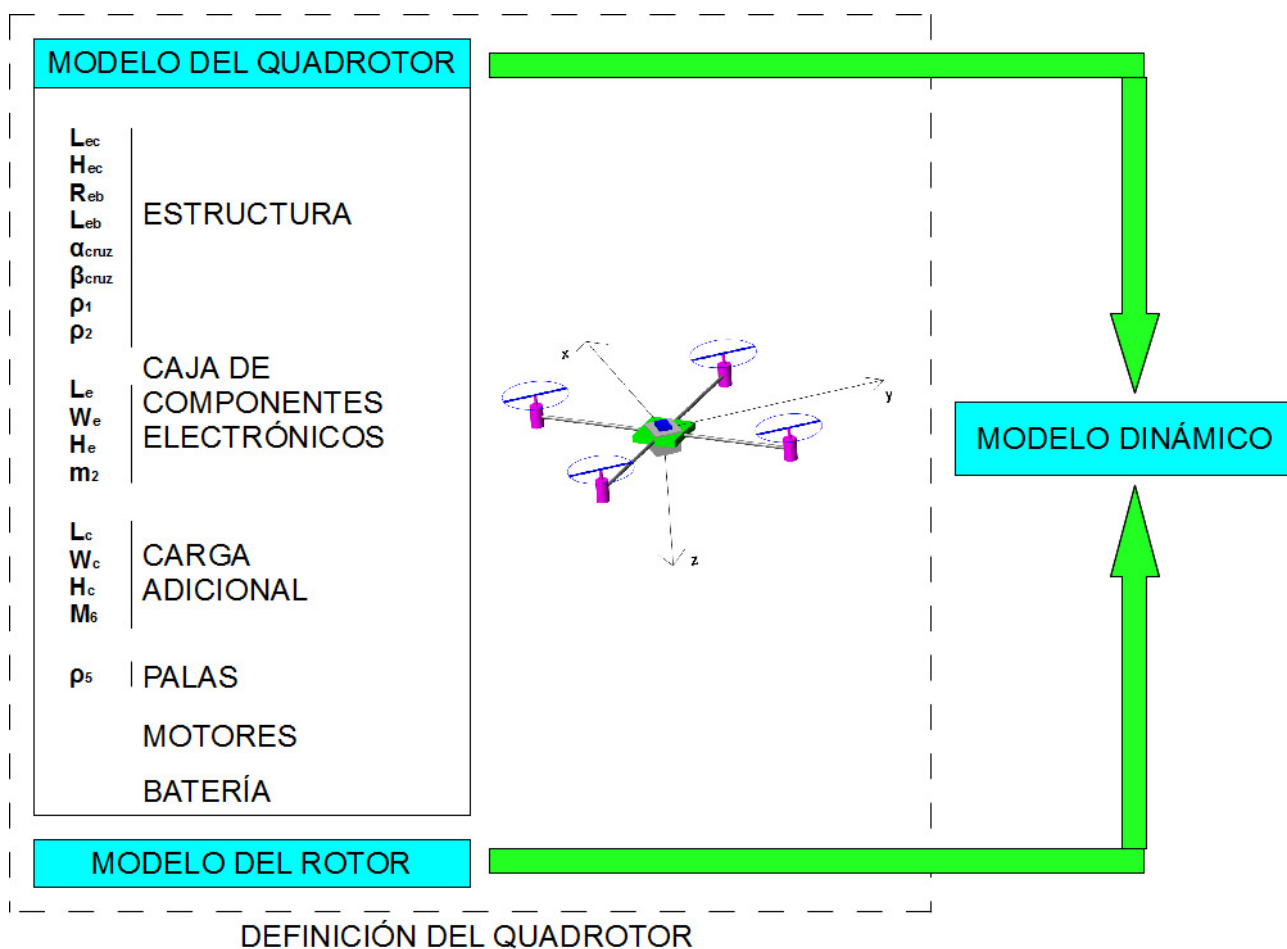
$$J_m = m_3 \left( \frac{R_m^2}{2} \right) + m_5 \left( \frac{R_{ext}^2}{3} \right) \quad (4.142)$$

Este valor se utiliza en el apartado 4.4.5 para la simulación del comportamiento de los motores.

#### 4.3.9 Resumen de la modelización del quadrotor

La Figura 4.25 es un esquema de lo estudiado hasta este momento. La modelización del rotor aportaba las características geométricas de este, y como resultado final, las *Cartas de navegación*. En el apartado 4.3 se ha modelizado el quadrotor, dividiendo este en partes, asumiendo hipótesis geométricas y de configuración, y estableciendo relaciones entre la aerodinámica, los motores y la batería.

Todo ello, modelo del rotor y modelo del quadrotor define propiamente el helicóptero, es decir, el diseño del mismo. Y es este diseño el que determina el comportamiento del helicóptero, es decir su *forma de volar* obtenida a partir de la resolución del modelo dinámico.



**Figura 4.25**

Se trata, por tanto, del final de las etapas de modelización del quadrotor y el inicio de la etapa en la que quedan definidas las fuerzas y momentos actuantes sobre el sistema.

## 4.4 Modelo dinámico

### 4.4.1 Introducción y planteamiento del modelo

El modelo dinámico del quadrotor establece cuáles son las fuerzas y los momentos actuantes en el sistema de coordenadas establecido. El objetivo es determinar la nueva posición del quadrotor en el instante de tiempo  $t + \Delta t$  cuando se conocen en el instante  $t$  los valores de las fuerzas y los momentos.

Se trata por tanto de una caja negra, un etapa que para el usuario es transparente ya que conecta el modelo de quadrotor diseñado a través de la interface gráfica del simulador de vuelo.

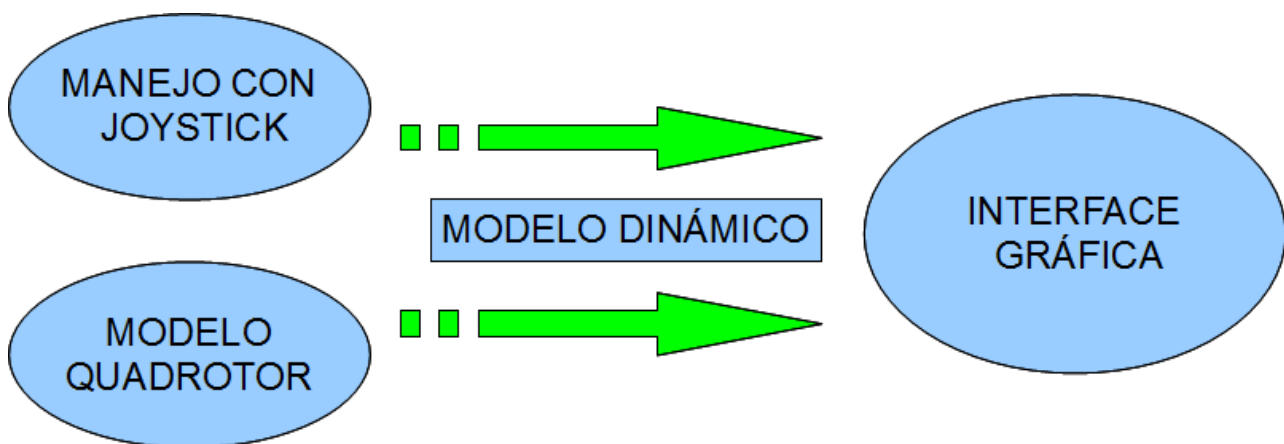


Figura 4.26

El modelo dinámico debe tener los siguientes compromisos:

- Por un lado debe ser suficientemente completo como para que la dinámica de la simulación sea lo más parecida posible a la dinámica real.
- Por otro lado, debe considerar el hecho de que los cálculos no han de ser excesivos. Se entiende en este punto que los cálculos son excesivos cuando la simulación no puede ejecutarse en tiempo real debido al coste computacional que suponen.

Surge ya en este punto la necesidad de definir ciertas variables:

- Paso de simulación  $\Delta t$ : Se trata del incremento de tiempo que se establece para calcular cada nueva posición. El usuario debe introducirlo a través del software. Valores muy pequeños del paso de simulación permiten calcular posiciones y velocidades con una gran precisión, a costa de ralentizar el proceso de cálculo. Si el paso de simulación es muy pequeño, ésta podría no realizarse en tiempo real.

- Vector de posición lineal del quadrotor en la base de la tierra  $\mathbf{X}_e$ : Se denotan sus componentes de la siguiente manera:

$$\mathbf{X}_e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_e \quad (4.143)$$

- Vector de ángulos de Euler  $\Phi$ : Se denotan sus componentes de la siguiente manera:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} \quad (4.144)$$

El quadrotor es un sistema que tiene 6 grados de libertad y 4 actuadores (correspondientes a los cuatro motores).

El modelo dinámico puede establecerse en el sistema de referencia inercial de la tierra, o en el sistema de referencia asociado al cuerpo, es decir asociado al quadrotor tal y como ilustra la Figura 4.27. En lo sucesivo se llamará  $\mathbf{x}_e$   $\mathbf{y}_e$   $\mathbf{z}_e$  a la base asociada a la tierra, y  $\mathbf{x}_b$   $\mathbf{y}_b$   $\mathbf{z}_b$  a la base asociada al quadrotor.

El modelo dinámico que se presenta a continuación toma como sistema de referencia la base asociada al quadrotor. De esta manera resulta más sencilla la implementación de las fuerzas y momentos en cada uno de los ejes.

La matriz de cambio de base  $\mathbf{M}_e^b$  de la base asociada al quadrotor  $\mathbf{x}_b$   $\mathbf{y}_b$   $\mathbf{z}_b$  a la base asociada a la tierra  $\mathbf{x}_e$   $\mathbf{y}_e$   $\mathbf{z}_e$  es la siguiente:

$$\mathbf{M}_e^b = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (4.145)$$

También resulta útil escribir la matriz de cambio de base  $\mathbf{M}_b^e$  de la base asociada a la tierra a la base asociada al quadrotor:

$$\mathbf{M}_b^e = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & \sin \psi \cos \theta & -\sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (4.146)$$

El ANEXO C presenta detalladamente la obtención de las matrices de cambio de base.

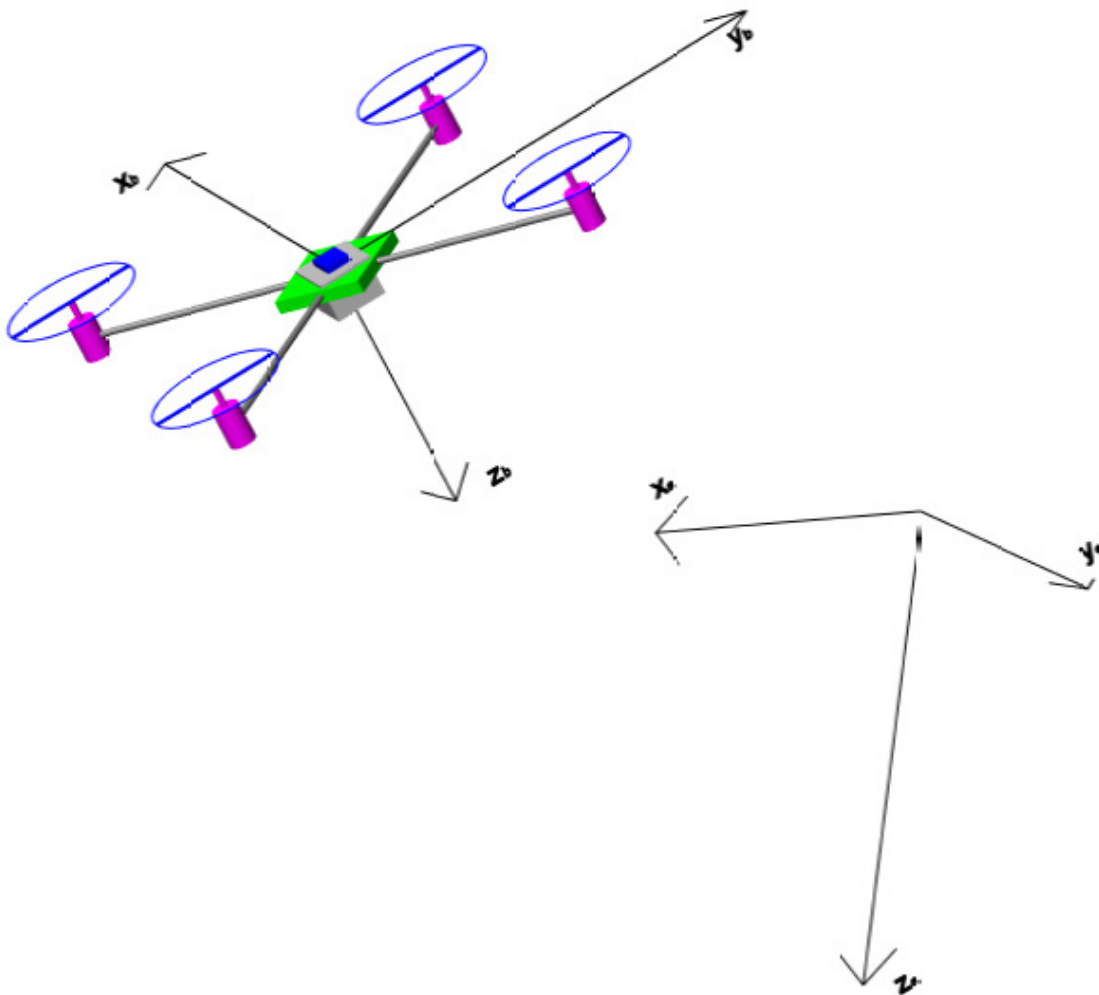


Figura 4.27

El modelo dinámico empleado es el formalismo de Newton – Euler. Así pues, las ecuaciones dinámicas que se deben cumplir, en la base asociada al quadrotor, son las siguientes:

$$\begin{pmatrix} m_{\text{total}} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{\text{total}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_b \\ \boldsymbol{\alpha}_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_b \times m_{\text{total}} \mathbf{V}_b \\ \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{I}_{\text{total}} \boldsymbol{\omega}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_b \\ \mathbf{M}_b \end{pmatrix} \quad (4.147)$$

En la expresión anterior aparecen los siguientes términos:

- Masa total del quadrotor  $m_{\text{total}}$ .
- Matriz de inercia del quadrotor  $\mathbf{I}_{\text{total}}$ .
- Vector de aceleración lineal del quadrotor en la base del quadrotor  $\mathbf{A}_b$ .
- Vector de aceleración angular del quadrotor en la base del quadrotor  $\boldsymbol{\alpha}_b$ .
- Vector de velocidad lineal del quadrotor en la base del quadrotor  $\mathbf{V}_b$ .
- Vector de velocidad angular del quadrotor en la base del quadrotor  $\boldsymbol{\omega}_b$ .
- Vector de fuerzas actuantes sobre el quadrotor en la base del quadrotor  $\mathbf{F}_b$ .
- Vector de momentos actuantes sobre el quadrotor en la base del quadrotor  $\mathbf{M}_b$ .

La modelización del quadrotor permite conocer los valores de  $\mathbf{m}_{\text{total}}$  e  $\mathbf{I}_{\text{total}}$ . Por tanto, queda establecer cuáles son las fuerzas  $\mathbf{F}_b$  y los momentos  $\mathbf{M}_b$  actuantes sobre el quadrotor en los ejes  $\mathbf{x}_b$   $\mathbf{y}_b$   $\mathbf{z}_b$  de la base del quadrotor. Los momentos se calculan respecto al centro de gravedad del quadrotor.

$$\mathbf{F}_b = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_b = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \quad (4.148)$$

En las expresiones que aparecen en este apartado, el subíndice  $i$  hace referencia a uno cualquiera de los cuatro rotores.

Se evalúa cada una de las componentes de  $\mathbf{F}_b$ :

$$F_x = F_x^H + F_x^{\text{peso}} + F_x^{\text{roz}} \quad (4.149)$$

$$F_y = F_y^H + F_y^{\text{peso}} + F_y^{\text{roz}} \quad (4.150)$$

$$F_z = F_z^T + F_z^{\text{peso}} + F_z^{\text{roz}} \quad (4.151)$$

Se evalúa cada una de las componentes de  $\mathbf{M}_b$ :

$$M_x = M_x^T + M_x^M + M_x^{\text{gc}} + M_x^{\text{roz}} \quad (4.152)$$

$$M_y = M_y^T + M_y^M + M_y^{\text{gc}} + M_y^{\text{roz}} \quad (4.153)$$

$$M_z = M_z^Q + M_z^{Hx} + M_z^{Hy} + M_x^{\text{gc}} \quad (4.154)$$

#### 4.4.2 Definición de las variables de entrada y salida del modelo

Resulta conveniente definir en este punto cuáles son las variables de entrada que necesita el modelo para obtener las variables de salida. La programación del modelo dinámico se ha realizado en Matlab, utilizando la herramienta Simulink.

Por un lado, existe un conjunto de variables de entrada que introduce el usuario en tiempo real durante la simulación. Estas son las referencias de velocidad de giro de los rotores. Para ello se utiliza *Simulink 3D Animation* que permite leer en tiempo real la información procedente de un joystick. Los aspectos relativos a este dispositivo y su implementación se describen en detalle en el apartado 4.5. Para la explicación del modelo dinámico basta con señalar que para cada instante de simulación se tiene una velocidad de giro de referencia para cada rotor  $\Omega_i^{\text{ref}}$ .

Por otro lado, las variables cinemáticas posición y velocidad, son lógicamente las variables de salida que determinan la situación del helicóptero en cada paso de simulación. No obstante, son también variables de entrada puesto que el cálculo de las



fuerzas y momentos en un instante de tiempo requiere del conocimiento del estado cinemático previo.

Finalmente, no hay que olvidar que existen otro conjunto de variables de salida que funcionan también como variables de entrada. Estas son las relativas a la simulación de los motores y la batería del quadrotor. Se denomina  $\Omega_i$  a la velocidad de giro de cada uno de los rotores. No debe confundirse esta variable con  $\Omega_i^{\text{ref}}$  ya que la primera de ellas es la velocidad real del rotor  $i$ , mientras que  $\Omega_i^{\text{ref}}$  es la referencia a la cual el usuario quiere que tienda  $\Omega_i$ .

La Figura 4.28 resume el proceso de cálculo en cada paso de simulación.

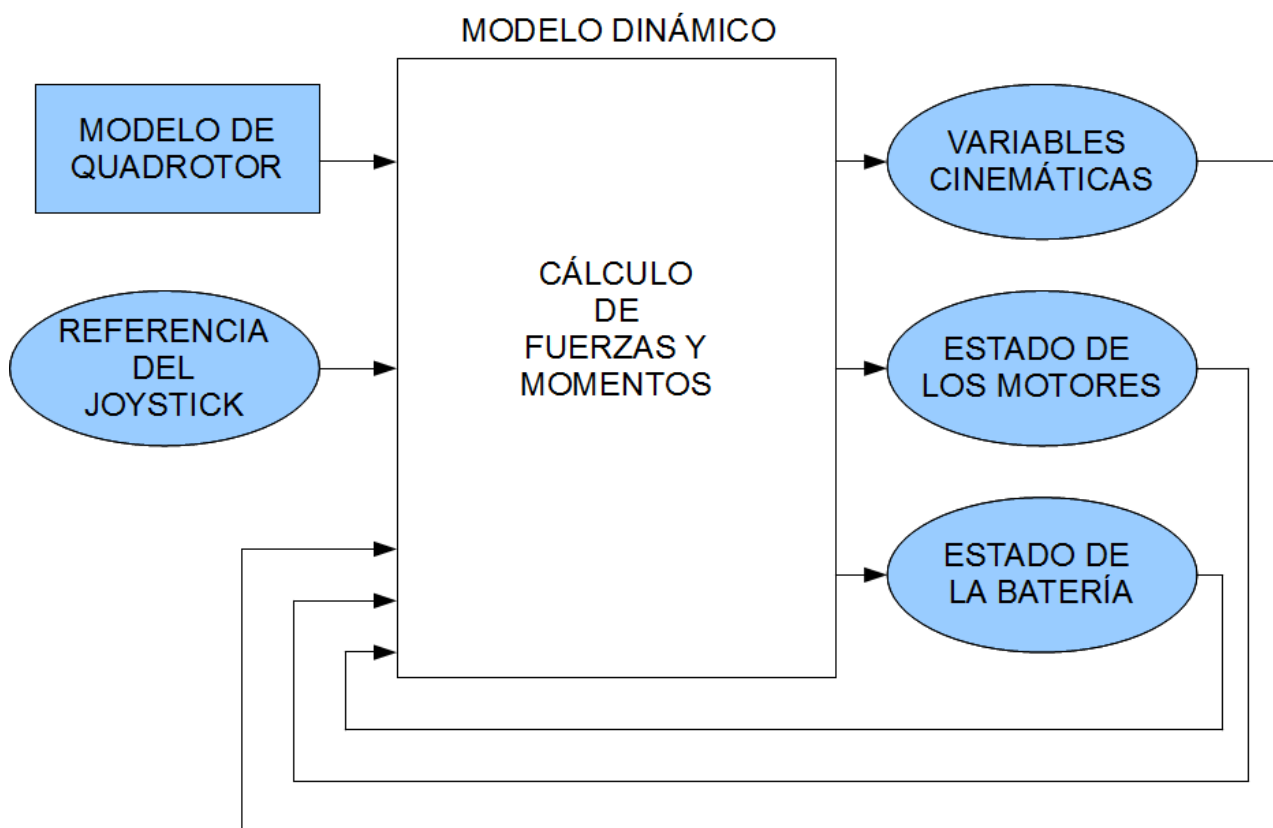


Figura 4.28

Para la resolución del problema dinámico, Matlab cuenta con un bloque de especial importancia en la toolbox *Aerospace Blockset*. Este bloque, representado en la Figura 4.29, permite obtener, para cada paso de la simulación, las variables de salida en el instante  $t + \Delta t$  cuando se conocen las variables de entrada al bloque en el instante  $t$ .

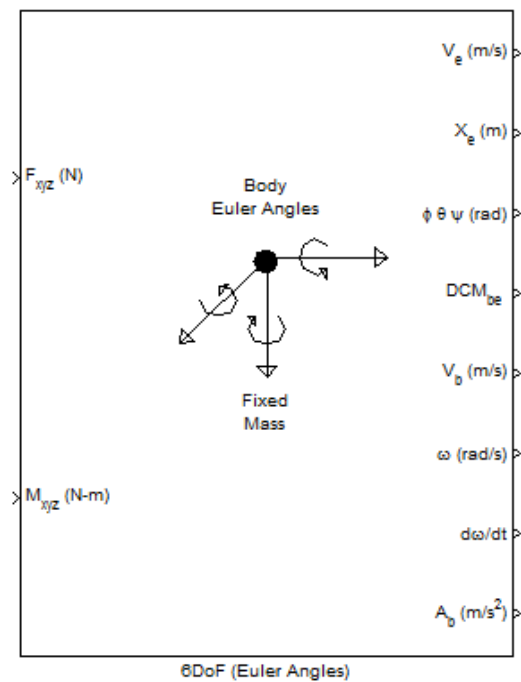


Figura 4.29

Las variables de entrada son:

- Valores que se mantienen fijos durante la simulación. Estos datos deben ser conocidos antes de comenzar la simulación.
  - Condiciones iniciales de posición y velocidad. Se toman 0 por defecto.
  - Masa del helicóptero. Se introduce el valor  $m_{total}$  calculado en el apartado 4.3.
  - Matriz de inercia del helicóptero. Se introduce el valor  $I_{total}$  calculado en el apartado 4.3.
- Vector de fuerzas actuantes sobre el quadrotor en la base del quadrotor  $F_b$ .
- Vector de momentos actuantes sobre el quadrotor en la base del quadrotor  $M_b$ .

Las variables de salida son:

- Vector de posición lineal del quadrotor en la base de la tierra  $X_e$ .
- Vector de ángulos de Euler  $\Phi$ .
- Matriz de cambio de base de la tierra al quadrotor  $M^e_b$ .
- Vector de velocidad lineal del quadrotor en la base del quadrotor  $V_b$ .
- Vector de velocidad lineal del quadrotor en la base de la tierra  $V_e$ .
- Vector de velocidad angular del quadrotor en la base del quadrotor  $\omega_b$ .
- Vector de aceleración angular del quadrotor en la base del quadrotor  $\alpha_b$ .
- Vector de aceleración lineal del quadrotor en la base del quadrotor  $A_b$ .

Estas variables de salida son precisamente las variables de entrada al modelo dinámico en el siguiente paso de simulación.

Por tanto, la resolución de las ecuaciones dinámicas supone conocer las fuerzas  $\mathbf{F}_b$  y los momentos  $\mathbf{M}_b$  en el instante  $\mathbf{t}$ , para obtener las variables de salida en  $\mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}$ .

#### 4.4.3 Cálculo de las variables de entrada de las *Cartas de navegación*

Antes de detallar cómo se realiza el cálculo de cada una de las fuerzas y momentos que intervienen en el modelo se estudia cómo calcular la velocidad  $\mathbf{V}$ , la velocidad de giro  $\mathbf{\Omega}$ , y el ángulo entre rotor y velocidad  $\alpha_v$  para cada uno de los cuatro rotores a partir de las variables de salida que proporciona Matlab.

En primer lugar, se determina el vector velocidad que ve cada rotor  $\mathbf{V}_{vri}$ .

$$\mathbf{V}_{vr1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathbf{b}_x^2 + \mathbf{b}_y^2} \dot{\psi} \sin\left(\frac{\alpha_{cruz}}{2}\right) \\ -\sqrt{\mathbf{b}_x^2 + \mathbf{b}_y^2} \dot{\psi} \cos\left(\frac{\alpha_{cruz}}{2}\right) \\ \mathbf{b}_x \dot{\theta} - \mathbf{b}_y \dot{\phi} \end{pmatrix}_b - \mathbf{V}_b \quad (4.155)$$

$$\mathbf{V}_{vr2} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\mathbf{b}_x^2 + \mathbf{b}_y^2} \dot{\psi} \cos\left(\frac{\alpha_{cruz}}{2}\right) \\ -\sqrt{\mathbf{b}_x^2 + \mathbf{b}_y^2} \dot{\psi} \sin\left(\frac{\alpha_{cruz}}{2}\right) \\ \mathbf{b}_x \dot{\theta} + \mathbf{b}_y \dot{\phi} \end{pmatrix}_b - \mathbf{V}_b \quad (4.156)$$

$$\mathbf{V}_{vr3} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\mathbf{b}_x^2 + \mathbf{b}_y^2} \dot{\psi} \sin\left(\frac{\alpha_{cruz}}{2}\right) \\ \sqrt{\mathbf{b}_x^2 + \mathbf{b}_y^2} \dot{\psi} \cos\left(\frac{\alpha_{cruz}}{2}\right) \\ -\mathbf{b}_x \dot{\theta} + \mathbf{b}_y \dot{\phi} \end{pmatrix}_b - \mathbf{V}_b \quad (4.157)$$

$$\mathbf{V}_{vr4} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathbf{b}_x^2 + \mathbf{b}_y^2} \dot{\psi} \cos\left(\frac{\alpha_{cruz}}{2}\right) \\ \sqrt{\mathbf{b}_x^2 + \mathbf{b}_y^2} \dot{\psi} \sin\left(\frac{\alpha_{cruz}}{2}\right) \\ -\mathbf{b}_x \dot{\theta} - \mathbf{b}_y \dot{\phi} \end{pmatrix}_b - \mathbf{V}_b \quad (4.158)$$

La velocidad que ve cada rotor es función de valores obtenidos en la modelización del quadrotor y también de la velocidad del centro de gravedad del quadrotor. Para el caso de vuelo axial, en el que no existe giro en torno a ninguno de los ejes  $\mathbf{x}_b$   $\mathbf{y}_b$   $\mathbf{z}_b$ , la velocidad que ve cada rotor es  $-\mathbf{V}_b$ . Como  $\mathbf{V}_b$  es la velocidad que lleva el helicóptero,  $-\mathbf{V}_b$  es la que ve cada rotor.

Pero la primera variable de entrada a las *Cartas de navegación*, no es la velocidad que ve el rotor. Se trata de una variable cuya magnitud coincide con el módulo de la velocidad que lleva el rotor (coincidente con el módulo de la velocidad vista por el rotor) y cuyo signo depende de la componente de la velocidad que lleva el rotor en el eje  $z_b$ . Así, la velocidad que lleva el rotor  $i$  es:

$$\mathbf{V}_{ri} = -\mathbf{V}_{vri} = \begin{pmatrix} V_{xri} \\ V_{yri} \\ V_{zri} \end{pmatrix}_b \quad (4.159)$$

Y entonces, la primera variable de entrada será:

$$V_i = -\text{sign}(V_{zri}) |V_{ri}| \quad (4.160)$$

Por otro lado, la segunda variable de entrada a las *Cartas de navegación*, la velocidad de giro de los rotores  $\Omega$ , se calcula a partir de la dinámica del rotor, aplicada a cada uno de los cuatro rotores. Su cálculo se detalla en el apartado 4.4.5.

El ángulo entre rotor y velocidad  $\alpha_v$  se obtiene fácilmente a partir de la expresión (4.159). Así para el rotor  $i$  se tiene:

$$\alpha_{vi} = -\text{arc tg} \left( \frac{|V_{zri}|}{\sqrt{V_{xri}^2 + V_{yri}^2}} \right) \quad (4.161)$$

Para vuelo axial, los rotores ven únicamente velocidad en la componente  $z_b$ . Se evalúa entonces una tangente que tiende a infinito, y el ángulo entre rotor y velocidad  $\alpha_v$  es entonces  $-90^\circ$ . El caso particular en el que las tres componentes son nulas (helicóptero parado), se toma también  $\alpha_v = -90^\circ$ .

Por otro lado se define una nueva variable  $\beta_v$ , que representa el ángulo formado por la componente de la velocidad en el eje  $x_b$  con la componente del eje  $y_b$ .  $\beta_v$  no es una variable de entrada a las *Cartas de navegación*, pero resulta necesario su empleo cuando se proyectan las fuerzas de arrastre y el momento en el eje de arrastre en los ejes  $x_b$  e  $y_b$ .

$$\beta_{vi} = \text{arc tg} \left( \frac{|V_{xri}|}{|V_{yri}|} \right) \quad (4.162)$$

A continuación se detalla cómo se ha realizado el cálculo de cada una de las fuerzas y momentos.

#### 4.4.4 Cálculo de las fuerzas y momentos

##### 4.4.4.1 Fuerza debida al peso

La fuerza debida al peso es fácilmente expresable en la base de la tierra. Pero en la expresiones (4.149), (4.150) y (4.151) el peso se expresa a partir de sus componentes en la base del quadrotor. Para calcular dichas componentes se utiliza la matriz de cambio de

base.

$$\mathbf{F}_e^{\text{peso}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_{\text{total}} g \end{pmatrix}_e \quad (4.163)$$

En la fórmula anterior se computa el peso como una fuerza cuya dirección es el eje  $\mathbf{z}_e$  de la tierra y de valor positivo, de acuerdo al convenio de ejes utilizado habitualmente en aeronáutica.

$$\mathbf{F}_b^{\text{peso}} = \mathbf{M}_b^e \mathbf{F}_e^{\text{peso}} = \begin{pmatrix} F_x^{\text{peso}} \\ F_y^{\text{peso}} \\ F_z^{\text{peso}} \end{pmatrix}_b \quad (4.164)$$

La fuerza debida al peso no genera momento respecto al centro de gravedad del quadrotor porque está aplicada en este punto.

#### 4.4.4.2 Fuerza debida al rozamiento con el aire

La fuerza de rozamiento con el aire se opone a la velocidad del quadrotor y es directamente proporcional al cuadrado de dicha velocidad. Existe, en general, una fuerza de rozamiento en cada uno de los ejes  $\mathbf{x}_e$   $\mathbf{y}_e$   $\mathbf{z}_e$  de la base de la tierra. Por tanto, una vez computado el valor de las tres componentes de la fuerza, se transforma su valor a la base del quadrotor.

$$\mathbf{F}_e^{\text{roz}} = - \frac{\rho C_q \|\mathbf{A}_e\| \|\mathbf{V}_e\| \mathbf{V}_e}{2} = - \frac{1}{2} \rho C_q \begin{pmatrix} |\mathbf{A}_x| \\ |\mathbf{A}_y| \\ |\mathbf{A}_z| \end{pmatrix}_e \begin{pmatrix} |\mathbf{V}_x| \\ |\mathbf{V}_y| \\ |\mathbf{V}_z| \end{pmatrix}_e \begin{pmatrix} \mathbf{V}_x \\ \mathbf{V}_y \\ \mathbf{V}_z \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} F_x^{\text{roz}} \\ F_y^{\text{roz}} \\ F_z^{\text{roz}} \end{pmatrix}_e \quad (4.165)$$

En la expresión anterior aparecen los siguientes términos:

- Densidad del aire  $\rho$ . Se asume que la densidad es constante y no varía con la altura. Esta hipótesis pretende ser coherente con los cálculos aerodinámicos que se llevaron a cabo en el apartado 4.2, en el cual se asumía densidad constante del aire.
- Coeficiente de fricción con el aire  $C_q$ . Se toma un valor constante de 1.3, tal y como sugiere la referencia [23].
- Vector de superficie del quadrotor  $\mathbf{A}_e$  vista según los ejes  $\mathbf{x}_e$   $\mathbf{y}_e$   $\mathbf{z}_e$  de la base de la tierra.
- Vector de velocidad lineal del quadrotor en la base de la tierra  $\mathbf{V}_e$ .

El cálculo de  $\mathbf{A}_e$  no es sencillo. Es más intuitivo expresar el área en la base del quadrotor  $\mathbf{x}_b$   $\mathbf{y}_b$   $\mathbf{z}_b$  y luego, mediante un cambio de base, calcular  $\mathbf{A}_e$ . Como lo que interesa es el valor numérico de la superficie se toma valor absoluto, ya que al hacer el cambio de base podría resultar que alguna componente fuese negativa. Haciendo uso de (4.136), (4.137) y (4.138) se calcula el área:

$$\mathbf{A}_e = \mathbf{M}_e^b \mathbf{A}_b = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_x \\ \mathbf{A}_y \\ \mathbf{A}_z \end{pmatrix}_e \quad (4.166)$$

Una vez calculado el vector de la fuerza de rozamiento en la base de la tierra a partir de (4.165) se calcula su valor en la base del quadrotor para computarlo en las expresiones (4.149), (4.150) y (4.151).

$$\mathbf{F}_b^{\text{roz}} = \mathbf{M}_b^e \mathbf{F}_e^{\text{roz}} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_x^{\text{roz}} \\ \mathbf{F}_y^{\text{roz}} \\ \mathbf{F}_z^{\text{roz}} \end{pmatrix}_b \quad (4.167)$$

En el cálculo del rozamiento no todas las expresiones se calculan en cada paso de la simulación. El cómputo del área en la base del quadrotor  $\mathbf{A}_b$  es el mismo para todo instante de tiempo. Lo que cambia es el área del quadrotor vista por el sistema de referencia fijo asociado a la tierra  $\mathbf{A}_e$ . El almacenamiento de  $\mathbf{A}_b$  que se lleva a cabo en la modelización del quadrotor permite ahora ahorrar tiempo de cálculo.

Por otro lado, cabe plantearse si la fuerza de rozamiento genera momento sobre el quadrotor. En un primer momento, se optó por no implementarlo debido a su reducido efecto sobre el sistema, pero posteriormente, se completó el modelo dinámico con este momento que actúa sobre los ejes  $\mathbf{x}_b$  e  $\mathbf{y}_b$ . Para su cálculo se obtendrá un valor de fuerza de rozamiento en el eje  $\mathbf{z}_b$  del quadrotor para cada rotor  $i$ , estas cuatro fuerzas son las responsables de generar un momento total debido al rozamiento con el aire.

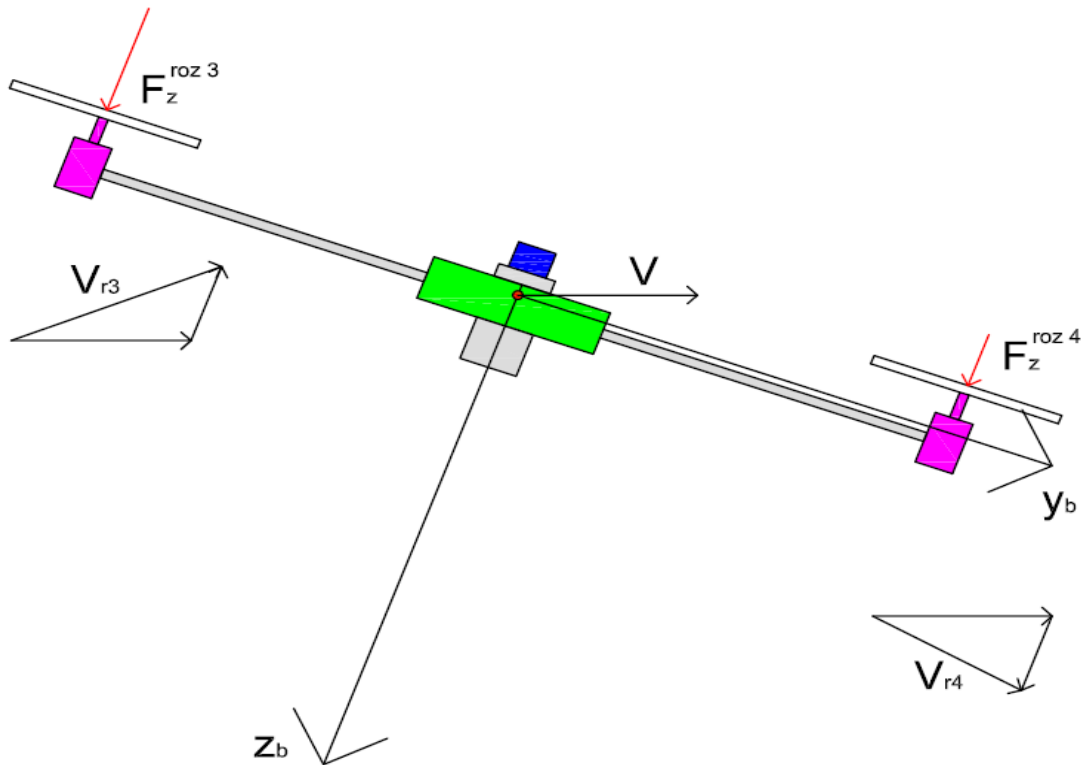


Figura 4.30

La Figura 4.30 muestra un esquema del efecto de esta fuerza. Se representan los rotores 3 y 4, pero la situación del 2 es simétrica a la del 3, y la del 1 también es simétrica a la del 4. Cuando el quadrotor gira respecto al eje  $\mathbf{x}_b$  para realizar un vuelo de avance aparece una fuerza de rozamiento con el aire. Sólo la componente en el eje  $\mathbf{z}_b$  de esta fuerza tiene un efecto notable, ya que el resto de componentes de la fuerza en el plano formado por los ejes  $\mathbf{x}_b$  e  $\mathbf{y}_b$  es prácticamente despreciable debido a que el vector normal al rotor lleva la dirección de  $\mathbf{z}_b$ . Además, al avanzar, el giro en torno a  $\mathbf{x}_b$  es positivo. Entonces, la velocidad que llevan los rotores 2 y 3 es mayor (en módulo) de la que llevan los rotores 1 y 4, tal y como se ve en la figura. Esto permite concluir que la fuerza de rozamiento será mayor en los rotores 2 y 3. El momento generado por esta fuerza en el eje  $\mathbf{x}_b$  tiende, por tanto, a estabilizar el helicóptero.

Puede pensarse que no tiene mucho sentido calcular la fuerza de rozamiento con el aire de manera global, independientemente de la velocidad vista por los rotores, tomando como referencia la velocidad del centro de gravedad del helicóptero, y por otro lado, calcular el momento a partir de cuatro fuerzas de rozamiento, una por cada rotor. Pero se ha optado por hacerlo de esta forma por sencillez. El cálculo de la fuerza de rozamiento a partir de la velocidad del centro de gravedad del sistema no permite determinar el momento que hace el aire, por tanto debería despreciarse en ese caso. La determinación de cuatro fuerzas de rozamiento, una por cada rotor, permite tener en cuenta este efecto sin complicar el cálculo de la fuerza dado por la expresión (4.165). Cabe destacar también, que el momento se computa sobre los ejes  $\mathbf{x}_b$  e  $\mathbf{y}_b$ , tal y como se ha dicho anteriormente, y no sobre  $\mathbf{z}_b$ . Esto se debe a que la inestabilidad asociada al quadrotor sobre dichos ejes de avance, que será estudiada en el apartado 4.4.7, dictamina la necesidad, o al menos la sugerencia, de amortiguar la dinámica con unos momentos pequeños pero que mejoran la estabilidad del sistema.

La fuerza de rozamiento sobre el rotor  $i$  se calcula a partir de la velocidad que lleva, dada por la expresión (4.159). Entonces

$$\mathbf{F}_e^{\text{rozi}} = - \frac{\rho C_q |\mathbf{A}_e^r| |\mathbf{V}_{ri}| |\mathbf{V}_{ri}|}{2} = - \frac{1}{2} \rho C_q \begin{pmatrix} |\mathbf{A}_x^r| \\ |\mathbf{A}_y^r| \\ |\mathbf{A}_z^r| \end{pmatrix}_e \begin{pmatrix} |\mathbf{V}_{xri}| \\ |\mathbf{V}_{yri}| \\ |\mathbf{V}_{zri}| \end{pmatrix}_e \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{xri} \\ \mathbf{V}_{yri} \\ \mathbf{V}_{zri} \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_x^{\text{rozi}} \\ \mathbf{F}_y^{\text{rozi}} \\ \mathbf{F}_z^{\text{rozi}} \end{pmatrix}_e \quad (4.168)$$

$\mathbf{A}_e^r$  hace referencia al área de un rotor vista según los ejes fijos de la tierra y se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$\mathbf{A}_e^r = \mathbf{M}_e^b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi R_{\text{ext}}^2 \end{pmatrix}_b = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_x^r \\ \mathbf{A}_y^r \\ \mathbf{A}_z^r \end{pmatrix}_e \quad (4.169)$$

Se obtiene a continuación la fuerza de rozamiento en la base del quadrotor:

$$\mathbf{F}_b^{\text{rozi}} = \mathbf{M}_b^e \mathbf{F}_e^{\text{rozi}} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_x^{\text{rozi}} \\ \mathbf{F}_y^{\text{rozi}} \\ \mathbf{F}_z^{\text{rozi}} \end{pmatrix}_b \rightarrow \mathbf{F}_b^{\text{rozi}} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_x^{\text{rozi}} \rightarrow 0 \\ \mathbf{F}_y^{\text{rozi}} \rightarrow 0 \\ \mathbf{F}_z^{\text{rozi}} \end{pmatrix}_b \rightarrow \mathbf{F}_b^{\text{rozi}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{F}_z^{\text{rozi}} \end{pmatrix}_b \quad (4.170)$$

La expresión (4.170) muestra que sólo se toma en consideración la componente de la fuerza de rozamiento en el eje  $\mathbf{z}_b$  de la base del quadrotor, de manera que ahora, el momento sobre los ejes  $\mathbf{x}_b$  e  $\mathbf{y}_b$  sean:

$$\mathbf{M}_x^{\text{roz}} = (\mathbf{F}_z^{\text{roz1}} - \mathbf{F}_z^{\text{roz2}} - \mathbf{F}_z^{\text{roz3}} + \mathbf{F}_z^{\text{roz4}}) \mathbf{b}_y \quad (4.171)$$

$$\mathbf{M}_y^{\text{roz}} = (-\mathbf{F}_z^{\text{roz1}} - \mathbf{F}_z^{\text{roz2}} + \mathbf{F}_z^{\text{roz3}} + \mathbf{F}_z^{\text{roz4}}) \mathbf{b}_x \quad (4.172)$$

Entonces, el vector del momento debido al rozamiento con el aire es:

$$\mathbf{M}_b^{\text{roz}} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_x^{\text{roz}} \\ \mathbf{M}_y^{\text{roz}} \\ 0 \end{pmatrix}_b = \begin{pmatrix} (\mathbf{F}_z^{\text{roz1}} - \mathbf{F}_z^{\text{roz2}} - \mathbf{F}_z^{\text{roz3}} + \mathbf{F}_z^{\text{roz4}}) \mathbf{b}_y \\ (-\mathbf{F}_z^{\text{roz1}} - \mathbf{F}_z^{\text{roz2}} + \mathbf{F}_z^{\text{roz3}} + \mathbf{F}_z^{\text{roz4}}) \mathbf{b}_x \\ 0 \end{pmatrix}_b \quad (4.173)$$

#### 4.4.4.3 Fuerza debida al empuje aerodinámico

El giro de las palas genera una fuerza de empuje en la dirección perpendicular al plano definido por el rotor, tal y como se vio en el apartado 4.2. Esta dirección es  $\mathbf{z}_b$  (pero de sentido contrario a este eje, ya que se ha definido  $\mathbf{z}_b$  positivo *hacia abajo*). Cada rotor genera una fuerza de empuje  $\mathbf{T}$  que es función de su velocidad  $\mathbf{V}$ , su velocidad de giro  $\mathbf{\Omega}$ , y el ángulo entre rotor y velocidad  $\alpha_v$ .

$$\mathbf{F}_b^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{F}_z^T \end{pmatrix}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sum_{i=1}^4 \mathbf{T}_i \end{pmatrix}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_3 - \mathbf{T}_4 \end{pmatrix}_b \quad (4.174)$$

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{T}_i(\mathbf{V}_i, \mathbf{\Omega}_i, \alpha_{vi}) \quad (4.175)$$

La fuerza de empuje se evalúa, en cada instante de cálculo, a partir de la *Carta de navegación* de empuje. Como estas matrices se calcularon de manera que no importase cual es la orientación del quadrotor con el suelo, la salida obtenida de dicha matriz, es decir, el empuje, se encuentra ya sobre la dirección  $\mathbf{z}_b$  de manera que el cálculo de la expresión (4.174) es inmediato, reduciéndose así el coste computacional durante la simulación. Las tres variables de entrada a las matrices son conocidas, tal y como se explicó en el apartado 4.4.3. La Figura 4.31 ayuda a entender la explicación anterior.



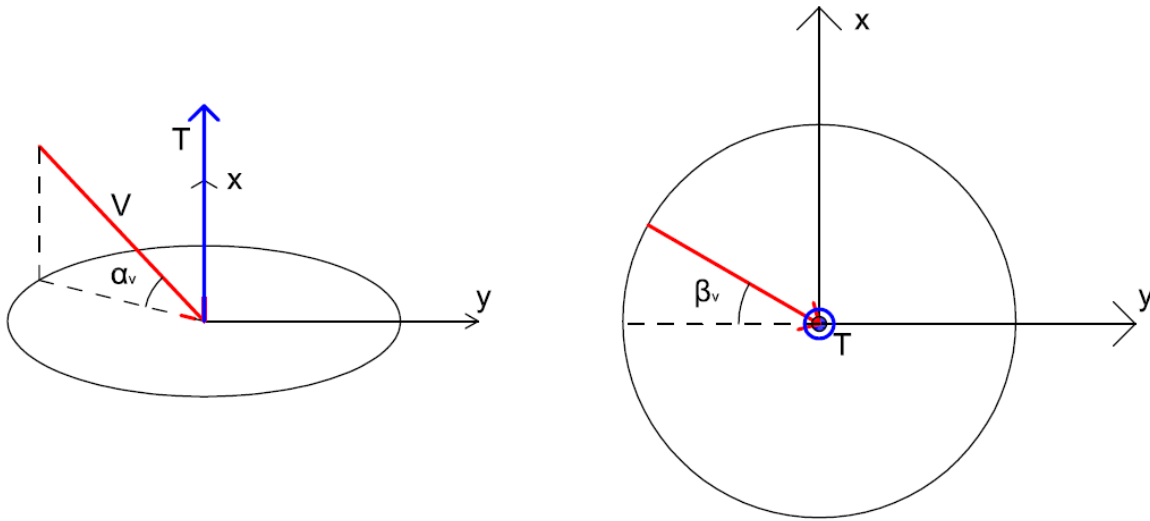


Figura 4.31

La fuerza debida al empuje de cada rotor genera momento en los ejes  $\mathbf{x}_b$  e  $\mathbf{y}_b$ . Los rotores 2 y 3 generan un momento positivo en el eje  $\mathbf{x}_b$ , mientras que el 1 y el 4 generan un momento negativo. Por otro lado, los rotores 1 y 2 generan un momento positivo en  $\mathbf{y}_b$ , mientras que el 3 y el 4 generan un momento negativo. El cómputo de estos momentos es:

$$\mathbf{M}_x^T = (-T_1 + T_2 + T_3 - T_4) \mathbf{b}_y \quad (4.176)$$

$$\mathbf{M}_y^T = (T_1 + T_2 - T_3 - T_4) \mathbf{b}_x \quad (4.177)$$

Para el caso de vuelo axial, cada rotor ve la misma velocidad, de manera que el empuje generado por los cuatro rotores es el mismo. De esta forma, las expresiones (4.176) y (4.177) se anulan, no generándose momento debido al empuje para este régimen de vuelo.

Para el caso de vuelo de autorrotación, los valores de entrada a la *Carta de navegación* de empuje son los mismos para los rotores 1 y 3 ( $T_1 = T_3$ ), siendo también iguales los de los rotores 2 y 4 ( $T_2 = T_4$ ). Por tanto, la autorrotación tampoco genera momento de empuje<sup>24</sup>.

#### 4.4.4.4 Fuerza debida al arrastre aerodinámico

Las fuerzas de arrastre aerodinámico se generan en el rotor para cualquier régimen de vuelo distinto al axial. Es decir, siempre que un rotor ve una velocidad en una dirección distinta a la perpendicular al plano que forma el rotor se origina una fuerza de arrastre que se opone a la velocidad vista por el mismo.

<sup>24</sup> Este análisis es válido cuando la autorrotación comienza con el quadrotor en régimen de vuelo axial. Si la velocidad del centro de gravedad del quadrotor tiene alguna componente no nula en los ejes  $\mathbf{x}_b$ ,  $\mathbf{y}_b$ , entonces las variables de entrada a la *Carta de navegación* no serán las mismas para los rotores 1 y 3 (lo mismo para 2 y 4).

$$\mathbf{F}_b^H = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_x^H \\ \mathbf{F}_y^H \\ 0 \end{pmatrix}_b = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{xi}^H \\ \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{yi}^H \\ 0 \end{pmatrix}_b = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{x1}^H + \mathbf{F}_{x2}^H + \mathbf{F}_{x3}^H + \mathbf{F}_{x4}^H \\ \mathbf{F}_{y1}^H + \mathbf{F}_{y2}^H + \mathbf{F}_{y3}^H + \mathbf{F}_{y4}^H \\ 0 \end{pmatrix}_b \quad (4.178)$$

La evaluación de las fuerzas anteriores se lleva a cabo de acuerdo al siguiente procedimiento.

A partir de las variables de entrada a la *Carta de navegación* de arrastre se calcula  $\mathbf{H}$  para cada rotor:

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_i(\mathbf{V}_i, \mathbf{\Omega}_i, \alpha_{vi}) \quad (4.179)$$

Ahora bien, el valor de la fuerza calculado a partir de (4.179) tiene una dirección opuesta a la proyección de la velocidad del rotor en el plano del rotor. Esta dirección no coincide, en general, con ninguno de los ejes  $\mathbf{x}_b$   $\mathbf{y}_b$ , tal y como muestra la Figura 4.32.

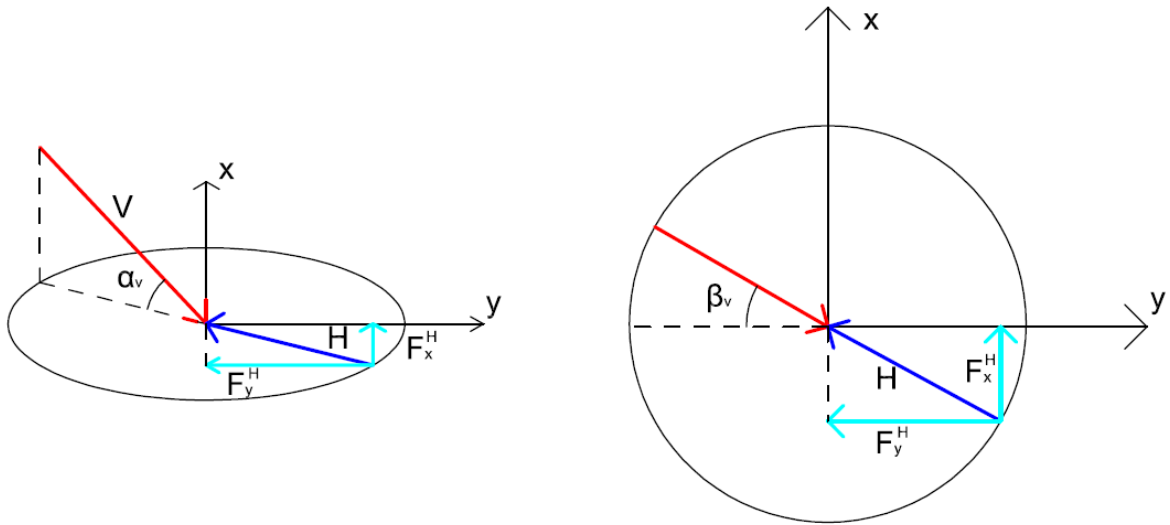


Figura 4.32

Entonces, la fuerza de arrastre en el eje  $\mathbf{x}_b$  del quadrotor se calcula como sigue para el rotor  $i$ :

$$\mathbf{F}_{xi}^H = -\mathbf{H}_i \text{sign}(\mathbf{V}_{xri}) \text{sign}(\mathbf{V}_i) \text{sen} \beta_{vi} \quad (4.180)$$

De manera análoga se calcula la fuerza de arrastre en el eje  $\mathbf{y}_b$  del quadrotor:

$$\mathbf{F}_{yi}^H = -\mathbf{H}_i \text{sign}(\mathbf{V}_{yri}) \text{sign}(\mathbf{V}_i) \cos \beta_{vi} \quad (4.181)$$

Para entender las fórmulas (4.180) y (4.181) se presenta la Figura 4.33 que ilustra algunos casos posibles.

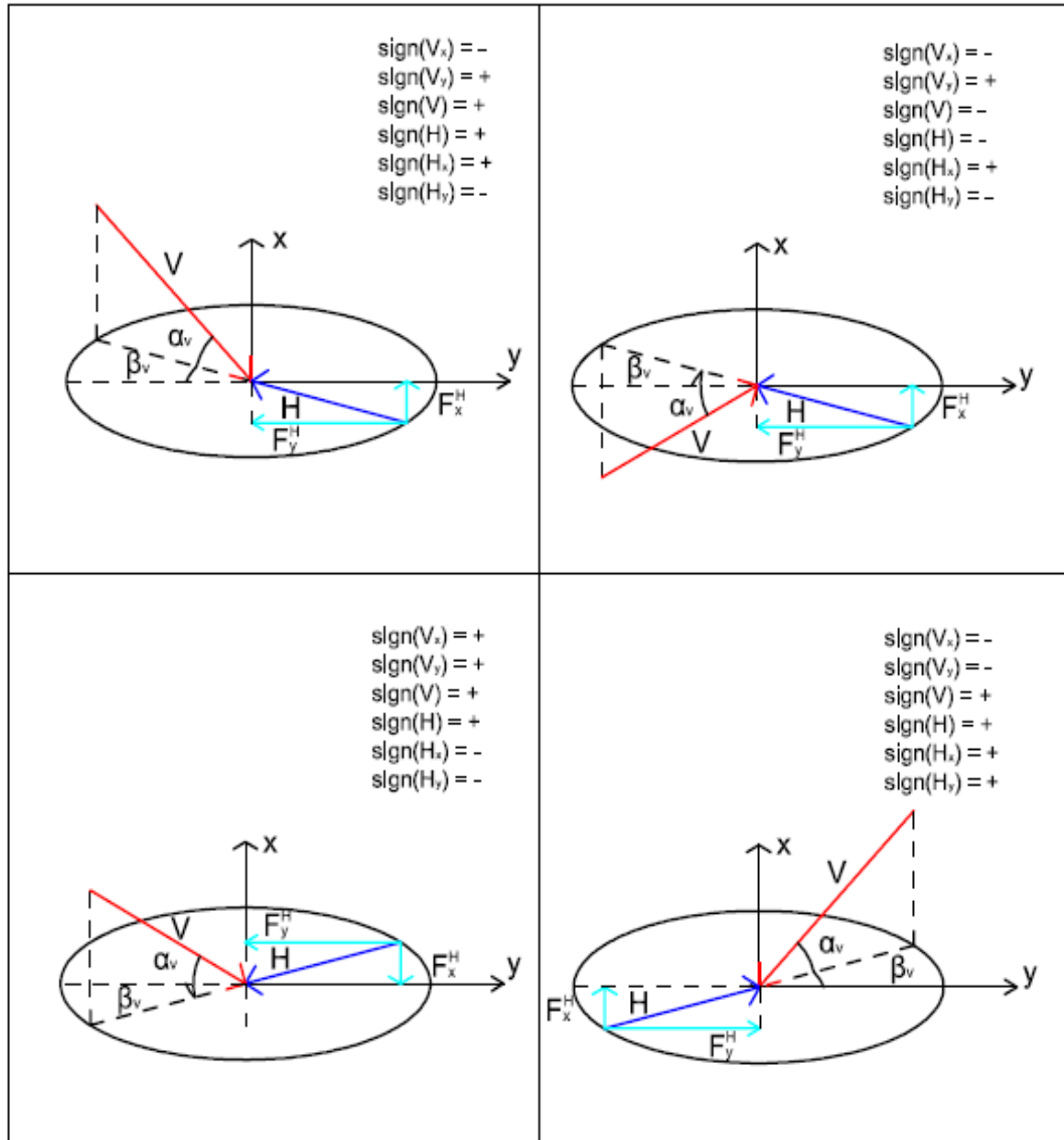


Figura 4.33

La fuerza de arrastre de cada rotor aplicada en el eje  $x_b$  genera momento en el eje  $y_b$  y  $z_b$ .

$$M_y^{Hx} = -b_z (F_{x1}^H + F_{x2}^H + F_{x3}^H + F_{x4}^H) \quad (4.182)$$

$$M_z^{Hx} = b_y (-F_{x1}^H + F_{x2}^H + F_{x3}^H - F_{x4}^H) \quad (4.183)$$

La fuerza de arrastre de cada rotor aplicada en el eje  $y_b$  genera momento en el eje  $x_b$  y  $z_b$ .

$$M_x^{Hy} = b_z (F_{y1}^H + F_{y2}^H + F_{y3}^H + F_{y4}^H) \quad (4.184)$$

$$\mathbf{M}_z^{Hy} = \mathbf{b}_x (F_{y1}^H + F_{y2}^H - F_{y3}^H - F_{y4}^H) \quad (4.185)$$

Entonces, el momento debido al arrastre aerodinámico es:

$$\mathbf{M}_b^H = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_x^{Hy} \\ \mathbf{M}_y^{Hx} \\ \mathbf{M}_z^{Hx} + \mathbf{M}_z^{Hy} \end{pmatrix}_b = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_z (F_{y1}^H + F_{y2}^H + F_{y3}^H + F_{y4}^H) \\ -\mathbf{b}_z (F_{x1}^H + F_{x2}^H + F_{x3}^H + F_{x4}^H) \\ \mathbf{b}_y (-F_{x1}^H + F_{x2}^H + F_{x3}^H - F_{x4}^H) + \mathbf{b}_x (F_{y1}^H + F_{y2}^H - F_{y3}^H - F_{y4}^H) \end{pmatrix}_b \quad (4.186)$$

La fuerza de arrastre tiene un efecto beneficioso para el manejo en determinadas circunstancias, debido a la configuración de los cuatro rotores en este tipo de helicóptero.

Por ejemplo, cuando se realiza un movimiento de autorrotación, el usuario del quadrotor, bien sea de un helicóptero real o de un simulador, solicita las siguientes condiciones de vuelo (para giro horario):

$$\Omega_1^{\text{ref}} = \Omega_3^{\text{ref}} = \Omega_{\text{hover}} - \Delta\Omega \quad (4.187)$$

$$\Omega_2^{\text{ref}} = \Omega_4^{\text{ref}} = \Omega_{\text{hover}} + \Delta\Omega \quad (4.188)$$

Entonces, cuando desea volver a una situación de vuelo axial parando el movimiento de autorrotación, no debe mandar la referencia de giro antihorario, sino que son las propias fuerzas de arrastre de los rotores las que permiten que el quadrotor detenga su giro en torno al eje  $\mathbf{z}_b$  sin que sea necesario ningún tipo de control.

El usuario mandaría entonces las siguientes referencias:

$$\Omega_1^{\text{ref}} = \Omega_2^{\text{ref}} = \Omega_3^{\text{ref}} = \Omega_4^{\text{ref}} = \Omega_{\text{hover}} \quad (4.189)$$

#### 4.4.4.5 Par en el eje motor

El giro de las palas genera un par aerodinámico en el eje motor. Este momento ya fue calculado, al igual que las fuerzas de empuje y arrastre en el apartado 4.2, almacenándose sus valores en la *Carta de navegación* del par en eje motor.

El procedimiento de cálculo es el mismo que el estudiado hasta ahora. Conocidas las variables de entrada de las *Cartas de navegación* se introduce su valor en la matriz para obtener el par generado por cada rotor.

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_i(\mathbf{V}_i, \Omega_i, \alpha_{vi}) \quad (4.190)$$

Este momento actúa en la dirección del eje  $\mathbf{z}_b$ , pero su signo depende de cómo se hayan definido los sentidos de giro de cada uno de los cuatro rotores. Así los rotores que giran en sentido horario (2 y 4) generan un par en eje motor de signo positivo, mientras que los rotores que giran en sentido antihorario (1 y 3) generan un par en eje motor de signo negativo.

$$\mathbf{M}_z^Q = \sum_{i=1}^4 (-1)^i \mathbf{Q}_i = -\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_3 + \mathbf{Q}_4 \quad (4.191)$$

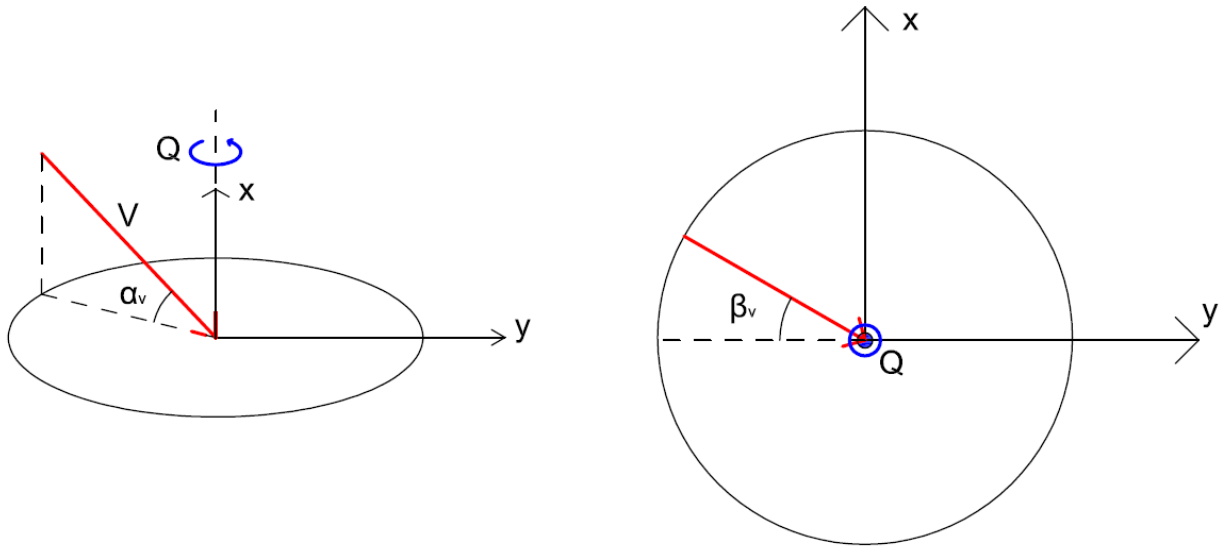


Figura 4.34

La configuración del quadrotor permite que para vuelo axial no se produzca consecuentemente movimiento de autorrotación. Como la magnitud del par para cada rotor es la misma (porque las variables de entrada a la *Carta de navegación* son iguales), la expresión anterior se anula.

De la misma forma, si se realiza vuelo de avance, la expresión (4.191) también se anula. Por ejemplo, si quiere avanzar en la dirección del eje  $\mathbf{y}_b$  se debe incrementar la velocidad de giro de los rotores 2 y 3, y decrementar la misma cantidad el giro de los rotores 1 y 4. Como los rotores 2 y 3 tienen las mismas variables de entrada a la *Carta de navegación* generan el mismo valor de par. Lo mismo puede decirse de los rotores 1 y 4. Entonces, se comprueba fácilmente que el momento total en torno al eje  $\mathbf{z}_b$  debido al par aerodinámico es nulo también para el vuelo de avance.

#### 4.4.4.6 Par en el eje de las fuerzas de arrastre

El par en el eje de las fuerzas de arrastre se produce sólo cuando hay movimiento de avance, y por tanto, fuerzas de arrastre de origen aerodinámico.

El efecto de este momento es muy pequeño, y podría despreciarse tal y como se hace en muchas de las referencias consultadas<sup>25</sup>. Este par se calcula como:

$$\mathbf{M}_b^M = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_x^M \\ \mathbf{M}_y^M \\ 0 \end{pmatrix}_b = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{x1}^M + \mathbf{M}_{x2}^M + \mathbf{M}_{x3}^M + \mathbf{M}_{x4}^M \\ \mathbf{M}_{y1}^M + \mathbf{M}_{y2}^M + \mathbf{M}_{y3}^M + \mathbf{M}_{y4}^M \\ 0 \end{pmatrix}_b \quad (4.192)$$

<sup>25</sup> Ver apartado 3.4.

La evaluación de los momentos anteriores se lleva a cabo de acuerdo al siguiente procedimiento.

A partir de las variables de entrada a la *Carta de navegación* de momento en eje de arrastre se calcula  $\mathbf{M}$  para cada rotor:

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{M}_i (\mathbf{V}_i, \boldsymbol{\Omega}_i, \alpha_{vi}) \quad (4.193)$$

Ahora bien, el valor del momento calculado a partir de (4.193) tiene una dirección que no coincide, en general, con ninguno de los ejes  $\mathbf{x}_b$   $\mathbf{y}_b$ , tal y como muestra la Figura 4.35.

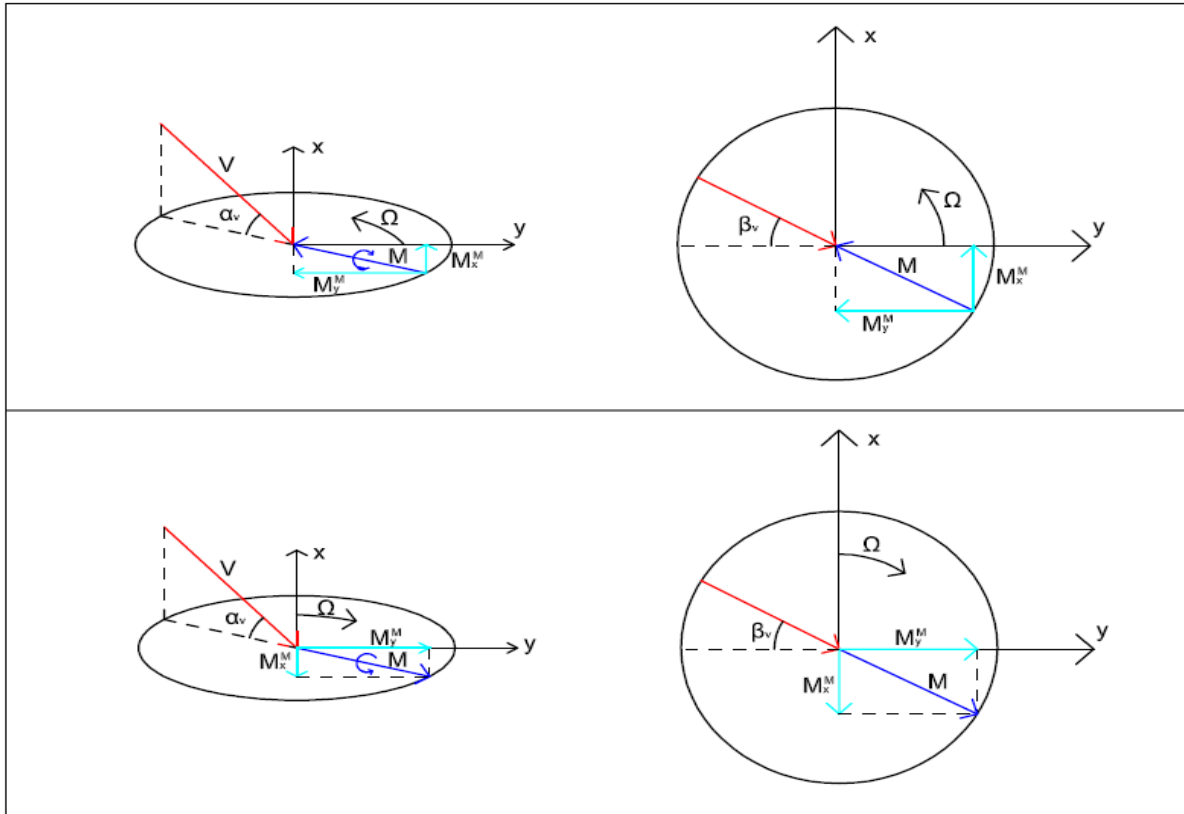


Figura 4.35

Entonces, el momento en el eje  $\mathbf{x}_b$  e  $\mathbf{y}_b$  del quadrotor se calcula como sigue para los rotores 1 y 3:

$$\mathbf{M}_{xi}^M = -\mathbf{M}_i \text{sign}(\mathbf{V}_{xri}) \text{sign}(\mathbf{V}_i) \text{sen} \beta_{vi} \quad (4.194)$$

$$\mathbf{M}_{yi}^M = -\mathbf{M}_i \text{sign}(\mathbf{V}_{yri}) \text{sign}(\mathbf{V}_i) \cos \beta_{vi} \quad (4.195)$$

Para los rotores 2 y 4, el momento se calcula de la siguiente forma:

$$\mathbf{M}_{xi}^M = \mathbf{M}_i \text{sign}(\mathbf{V}_{xri}) \text{sign}(\mathbf{V}_i) \text{sen} \beta_{vi} \quad (4.196)$$

$$\mathbf{M}_{yi}^M = \mathbf{M}_i \text{sign}(\mathbf{V}_{yri}) \text{sign}(\mathbf{V}_i) \cos \beta_{vi} \quad (4.197)$$

Para entender las fórmulas anteriores se presenta la Figura 4.36 que ilustra los algunos casos posibles, tal y como se hizo para la fuerza de arrastre.

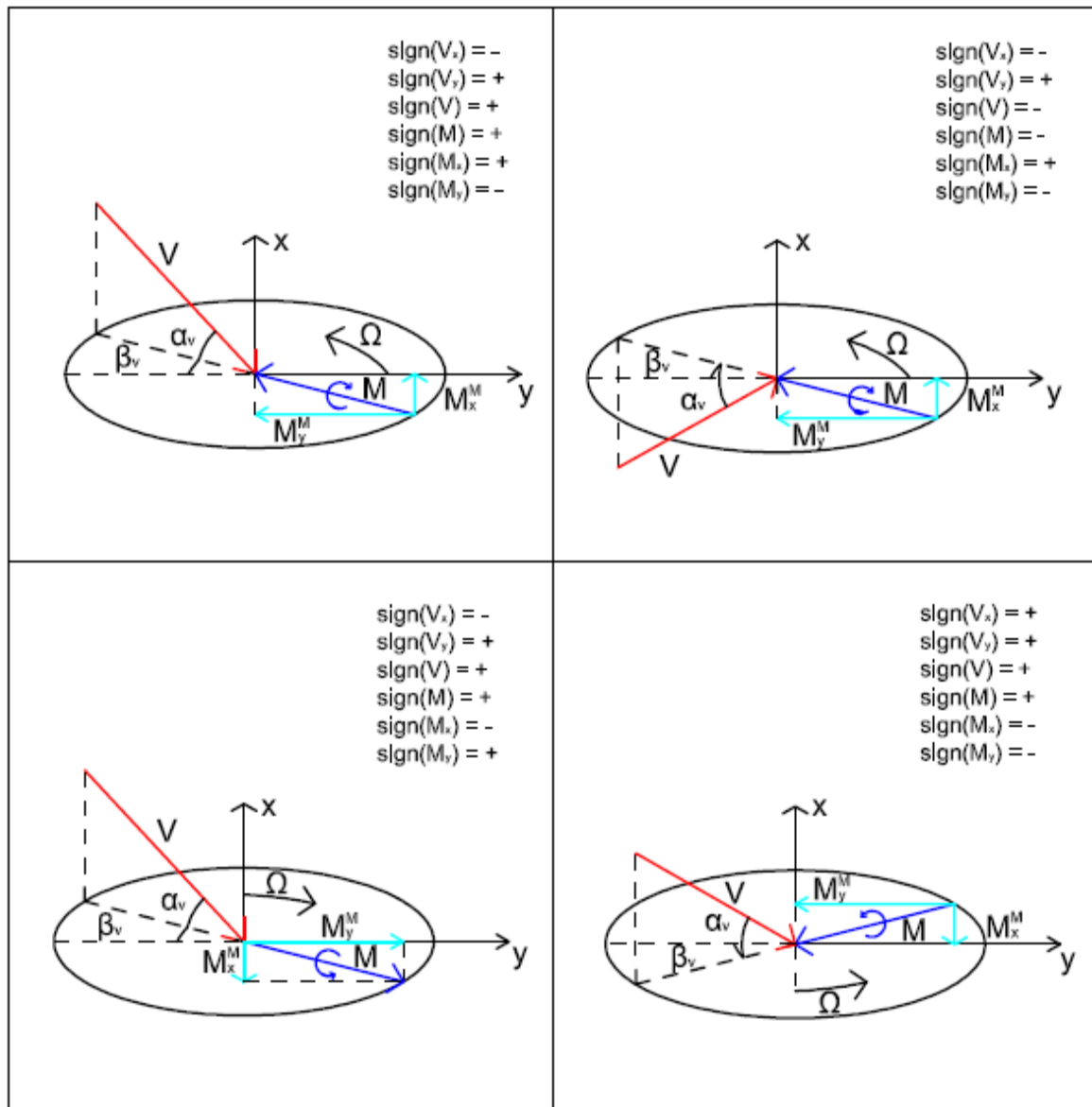


Figura 4.36

La mayor parte del tiempo la expresión (4.192) es nula. Solamente toma otro valor para determinadas situaciones transitorias como puede ser alguna situación de pérdidas o cambios bruscos de velocidad angular en varios ejes.

#### 4.4.4.7 Momento debido al efecto giroscópico

Los efectos giroscópicos que aparecen en el quadrotor generan momentos de magnitud mucho más pequeña que la provocada por el par producido por la fuerza de empuje o de arrastre, así como el que aparece por efecto del par aerodinámico. Sin embargo, se computan por la sencillez de cálculo que involucran, permitiendo completar el modelo de una manera más realista.

Así pues, el momento giroscópico se calcula como:

$$\mathbf{M}_b^{gc} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_x^{gc} \\ \mathbf{M}_y^{gc} \\ \mathbf{M}_z^{gc} \end{pmatrix}_b = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \dot{\psi} (I_{yy} - I_{zz}) + \mathbf{J}_m \dot{\theta} \Omega_r \\ \dot{\phi} \dot{\psi} (I_{zz} - I_{xx}) + \mathbf{J}_m \dot{\phi} \Omega_r \\ \dot{\theta} \dot{\phi} (I_{xx} - I_{yy}) \end{pmatrix}_b \quad (4.198)$$

En la expresión anterior  $\Omega_r$  se evalúa de la siguiente manera:

$$\Omega_r = -\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4 \quad (4.199)$$

De la expresión (4.198) se deduce que no sólo el giro del quadrotor como sólido rígido puede producir efectos giroscópicos. También el propio giro de los rotores en torno al eje perpendicular al plano que definen puede producir este tipo de efectos. Es el término que se computa con la inercia  $\mathbf{J}_m$ .

#### 4.4.5 Modelo de los motores

En este apartado se procede a explicar cómo se han implementado en el modelo las ecuaciones que rigen el comportamiento de los motores. Para ello se tomará el siguiente circuito representativo de un motor de continua.

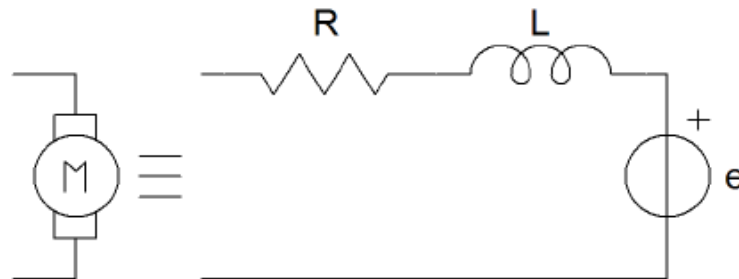


Figura 4.37

Se cumple por tanto la siguiente ecuación:

$$e(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + K_e \Omega(t) \quad (4.200)$$

En la expresión (4.200),  $K_e$  es una constante característica del motor que relaciona el voltaje con la velocidad de giro. Aunque las unidades no son las mismas, puede sustituirse  $K_e$  por  $K_m$ . La referencia [8] lleva a cabo un análisis detallado para justificar esta sustitución. Así pues, la expresión (4.200) toma la siguiente forma:

$$e(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + K_m \Omega(t) \quad (4.201)$$

Por otro lado, la dinámica del motor viene dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{J}_m \dot{\Omega} = \mathbf{T}_M - \mathbf{T}_L \quad (4.202)$$



donde  $T_M$  es el par motor y  $T_L$  es el par de carga.  $R$  es la resistencia interna del motor, dada en la hoja de características del motor y recogida en la base de datos de los motores.  $L$  es la inductancia del motor. Este valor no se recoge en la base de datos anterior porque en la mayor parte de las especificaciones de motores no se aporta este dato. Se estima un valor de inductancia de 2 mH para aquellos motores en los que esta magnitud es desconocida, ya que para motores de corriente continua con escobillas la inductancia se encuentra en torno a este valor.

Se procede a continuación a determinar las variables de velocidad de giro  $\Omega$  e intensidad  $i$  en  $t + \Delta t$  a partir de los valores en  $t$  de estas variables y la nueva referencia que manda el usuario  $\Omega^{ref}$ . El análisis se realiza para uno cualquiera de los rotores, pero es válido para los cuatro. No se introduce el subíndice  $i$  en referencia al rotor  $i$  para aligerar la notación.

Si el usuario marca la referencia de velocidad  $\Omega^{ref}$ , a esta le corresponde un par de referencia  $Q^{ref}$  dado por la *Carta de navegación* de par cuando se introduce por sus entradas las condiciones de velocidad del rotor  $V$  y ángulo entre rotor y velocidad  $\alpha_v$ , además de la referencia.

$$Q^{ref} = Q(V, \Omega^{ref}, \alpha_v) \quad (4.203)$$

De acuerdo a la expresión (4.201), la referencia se alcanzará cuando en estado estacionario se tenga el siguiente valor de voltaje, llamado también de referencia  $e^{ref}$ .

$$e^{ref} = R i^{ref} + K_m \Omega^{ref} = R \frac{Q^{ref}}{K_m} + K_m \Omega^{ref} \quad (4.204)$$

Se modifica la expresión (4.201) para obtener una fórmula de la intensidad en función del tiempo.

$$e = R i(t + \Delta t) + L \frac{i(t + \Delta t) - i(t)}{\Delta t} + K_m \Omega(t) \quad (4.205)$$

$$i(t + \Delta t) \left( R + \frac{L}{\Delta t} \right) = e + \frac{L}{\Delta t} i(t) - K_m \Omega(t) \quad (4.206)$$

$$i(t + \Delta t) = \frac{e + \frac{L}{\Delta t} i(t) - K_m \Omega(t)}{\left( R + \frac{L}{\Delta t} \right)} \quad (4.207)$$

Por tanto, para un voltaje de referencia se calcula la intensidad en el siguiente paso de la simulación  $t + \Delta t$  a partir de la intensidad y velocidad de giro en  $t$ . Posteriormente se calcula el valor de la velocidad de giro en  $t + \Delta t$  como sigue.

$$\Omega(t + \Delta t) = \Omega(t) + L \frac{T_M - T_L}{J_m} \Delta t \quad (4.208)$$

El par motor se calcula a partir de (4.207).

$$T_M = K_M i(t + \Delta t) \quad (4.209)$$

Y el par de carga a partir de la *Carta de navegación* de par:

$$T_L = Q(V, \Omega(t), \alpha_V) \quad (4.210)$$

La expresión (4.208) queda de la siguiente manera:

$$\Omega(t + \Delta t) = \Omega(t) + \frac{K_M i(t + \Delta t) - Q(V, \Omega(t), \alpha_V)}{J_M} \Delta t \quad (4.211)$$

#### 4.4.6 Modelo de la batería

Una vez explicado el modelo y las ecuaciones implementadas para la simulación de los motores, se presenta un breve estudio de la simulación de la batería. Este resulta necesario, ya que el simulador de vuelo en tiempo real adquiere más realismo cuando la descarga de la batería forma parte del cuadro de mandos que observa el usuario.

No se pretende en este apartado desarrollar un modelo preciso de la descarga de una batería, ya que no es ese el objetivo del proyecto. Simplemente se presenta una estimación de la vida de la batería en  $t + \Delta t$  a partir de la demanda de intensidad de corriente  $i_t$  que tienen los cuatro motores.

$$i_t = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 \quad (4.212)$$

El parámetro de la batería más importante en este análisis es la capacidad de la misma  $C_{bat}$ , medida en Ah. Entonces, se estima en cada paso de la simulación  $\Delta t$ , dado en segundos, la capacidad que se consume:

$$C_{bat}^{\Delta t} = i_t \frac{\Delta t}{3600} \quad (4.213)$$

De esta forma, la capacidad que se ha consumido en  $t + \Delta t$  es la que ya se había consumido en  $t$  más la consumida en el paso de la simulación.

$$C_{bat}^{total} = C_{bat}^t + C_{bat}^{\Delta t} \quad (4.214)$$

Inicialmente la capacidad consumida es 0, es decir, se supone al inicio que la batería está totalmente cargada. Si la expresión (4.214) representa la capacidad gastada, se calcula la capacidad restante como sigue:

$$C_{bat}^{res} = C_{bat} - C_{bat}^{total} \quad (4.215)$$

Se estima el tiempo de vida restante de la batería a partir de (4.212) y (4.215).

$$t_{bat}^{res} = \frac{C_{bat}^{res}}{i_t} 60 \quad (4.216)$$

Se multiplica por 60 para obtener el tiempo restante en minutos. Si la expresión (4.215) fuese negativa, no tendría sentido calcular el tiempo restante de batería puesto que indicaría que la batería ya se ha descargado. Cuando se alcanza este estado, los motores no pueden ser alimentados, por tanto las palas del quadrotor dejan de girar. En ese momento la sustentación del helicóptero desaparece y este finalmente cae al suelo.

#### 4.4.7 Estudio de estabilidad

Se presenta a continuación un estudio sobre la estabilidad del quadrotor para vuelo de avance. Este análisis está basado en parte en lo expuesto en la referencia [17].

Se toma en consideración que el quadrotor realiza un vuelo de avance en la dirección de  $\mathbf{x}_b$ . Las ecuaciones que se utilizan para el análisis son exclusivamente la fuerza en  $\mathbf{x}_b$ , y el momento en  $\mathbf{y}_b$ .

$$\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{xi}^H - m_{\text{total}} g \sin \theta = m_{\text{total}} \ddot{\mathbf{x}} \quad (4.217)$$

$$\mathbf{M}_y^T + \mathbf{M}_y^{Hx} = I_{yy} \ddot{\theta} \quad (4.218)$$

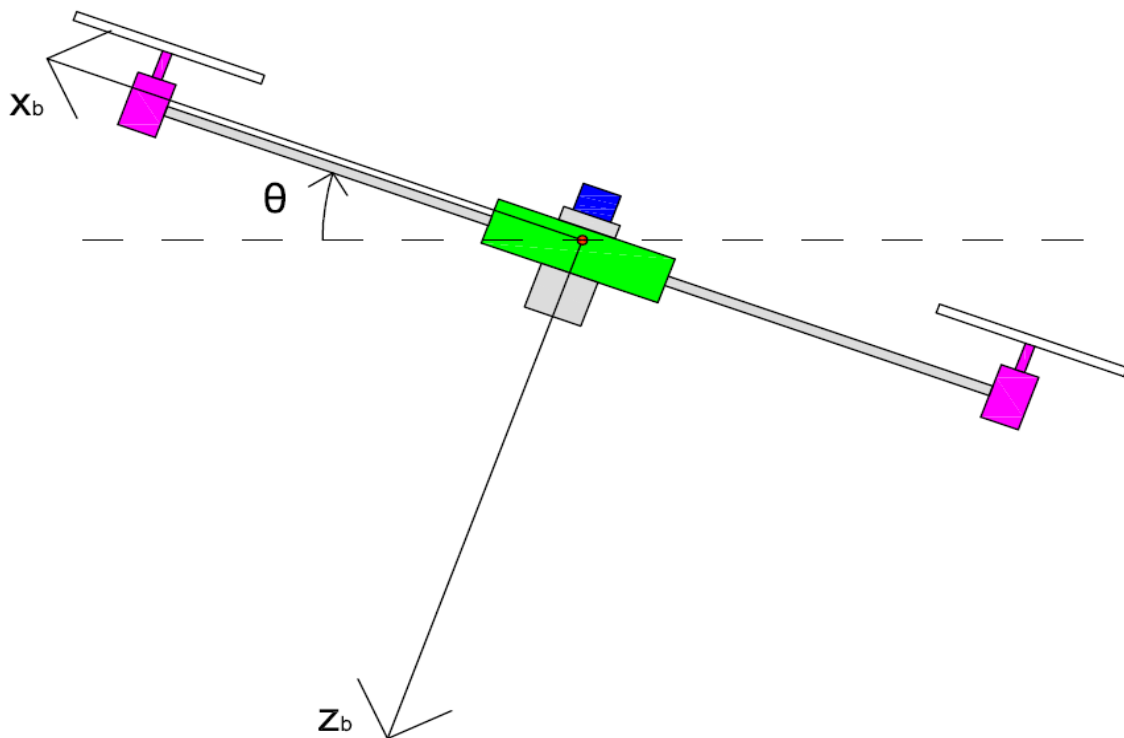


Figura 4.38

Las ecuaciones anteriores no tienen en cuenta los efectos giroscópicos ni el rozamiento con el aire. Tampoco se consideran los momentos aerodinámicos en el eje de arrastre. Además, se toman las siguientes hipótesis:

- La fuerza de arrastre aerodinámico es proporcional a la velocidad.

$$\mathbf{F}_{xi}^H \approx \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{x}} \quad (4.219)$$

- El ángulo  $\theta$  durante el avance es pequeño.

$$\text{sen } \theta \approx \theta \quad (4.220)$$

Entonces, se tiene:

$$(4 \mathbf{C}_1 - \mathbf{m}_{\text{total}} \mathbf{s}) \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{m}_{\text{total}} \mathbf{g} \theta = 0 \quad (4.221)$$

$$(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_3 - \mathbf{T}_4) \mathbf{b}_x + 4 \mathbf{C}_1 \mathbf{b}_z \dot{\mathbf{x}} - I_{yy} s^2 \theta = 0 \quad (4.222)$$

Se define el término  $\mathbf{T}_r$  para simplificar la notación.

$$\mathbf{T}_r = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_3 - \mathbf{T}_4 \quad (4.223)$$

De la expresión (4.222)

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{T}_r \mathbf{b}_x - I_{yy} s^2 \theta}{-4 \mathbf{C}_1 \mathbf{b}_z} \quad (4.224)$$

Sustituyendo en la expresión (4.221)

$$(4 \mathbf{C}_1 - \mathbf{m}_{\text{total}} \mathbf{s}) \left( \frac{\mathbf{T}_r \mathbf{b}_x - I_{yy} s^2 \theta}{-4 \mathbf{C}_1 \mathbf{b}_z} \right) - \mathbf{m}_{\text{total}} \mathbf{g} \theta = 0 \quad (4.225)$$

$$\frac{(4 \mathbf{C}_1 - \mathbf{m}_{\text{total}} \mathbf{s}) \mathbf{b}_x}{-4 \mathbf{C}_1 \mathbf{b}_z} \mathbf{T}_r - \frac{(4 \mathbf{C}_1 - \mathbf{m}_{\text{total}} \mathbf{s}) I_{yy} s^2 \theta}{-4 \mathbf{C}_1 \mathbf{b}_z} - \mathbf{m}_{\text{total}} \mathbf{g} \theta = 0 \quad (4.226)$$

$$\frac{(4 \mathbf{C}_1 - \mathbf{m}_{\text{total}} \mathbf{s}) \mathbf{b}_x}{-4 \mathbf{C}_1 \mathbf{b}_z} \mathbf{T}_r = \theta \left[ \frac{(4 \mathbf{C}_1 - \mathbf{m}_{\text{total}} \mathbf{s}) I_{yy} s^2}{-4 \mathbf{C}_1 \mathbf{b}_z} + \mathbf{m}_{\text{total}} \mathbf{g} \right] \quad (4.227)$$

$$\frac{\theta(s)}{\mathbf{T}_r(s)} = \frac{(4 \mathbf{C}_1 - \mathbf{m}_{\text{total}} \mathbf{s}) \mathbf{b}_x}{(4 \mathbf{C}_1 - \mathbf{m}_{\text{total}} \mathbf{s}) I_{yy} s^2 - 4 \mathbf{C}_1 \mathbf{b}_z \mathbf{m}_{\text{total}} \mathbf{g}} \quad (4.228)$$

Finalmente se ha obtenido la siguiente función de transferencia donde para una entrada  $\mathbf{T}_r$  se obtiene la salida  $\theta$ . Se estudia la estabilidad mediante el criterio de Routh. Para ello se toma el denominador de la función de transferencia:

$$\text{Den} \left( \frac{\theta(s)}{\mathbf{T}_r(s)} \right) = -\mathbf{m}_{\text{total}} I_{yy} s^3 + 4 \mathbf{C}_1 I_{yy} s^2 - 4 \mathbf{C}_1 \mathbf{b}_z \mathbf{m}_{\text{total}} \mathbf{g} \quad (4.229)$$

$$\begin{array}{rcl}
s^3 & - m_{\text{total}} I_{yy} & 0 \\
s^2 & 4 C_1 I_{yy} & - 4 C_1 b_z m_{\text{total}} g \\
s & - m_{\text{total}}^2 g b_z & 0 \\
s^0 & - 4 C_1 b_z m_{\text{total}} g & 
\end{array}$$

Se estudia el signo de los términos de la primera columna. El primero de ellos, es negativo ya que la masa y la inercia son positivas. El segundo término también es negativo ya que  $C_1$  es menor que 0 puesto que el arrastre se opone a la velocidad. Para que el sistema sea estable, el criterio de Routh afirma que no debe haber cambios en el signo de los términos de la primera columna. De acuerdo a esto, el tercer término es negativo si  $b_z$  es mayor que 0. Pero entonces, el cuarto término sería positivo.

La importancia de este análisis radica en el hecho de que se deduce que el sistema es inestable independientemente de donde se sitúe el centro de gravedad del quadrotor.

- Si el centro de gravedad se encuentra por debajo del plano definido por los rotores, se tiene  $b_z > 0$  y el sistema es inestable.
- Si el centro de gravedad se encuentra en el plano definido por los rotores, se tiene  $b_z = 0$  y el sistema es críticamente estable.
- Si el centro de gravedad se encuentra por encima del plano definido por los rotores, se tiene  $b_z < 0$  y el sistema es inestable.

En el Capítulo 5 se analizan los resultados que se obtienen de la simulación para diferentes posiciones del centro de gravedad del quadrotor, validando de esta forma el estudio teórico que se ha expuesto.

#### 4.4.8 Modelo de control para el vuelo de avance

El análisis de la estabilidad para el vuelo de avance que se ha llevado a cabo sugiere la necesidad de implementar un control que haga que el helicóptero pueda realizar el vuelo de avance sin perder estabilidad. No se pretende en este proyecto desarrollar un exhaustivo análisis de los diferentes tipos de control que se pueden incorporar al quadrotor. Simplemente se desea solucionar el problema de la inestabilidad del vuelo de avance de una manera sencilla. Por eso el tipo de control que se ha tomado es un PID.

Lo primero que debe determinarse es la variable a controlar. El sistema de control actúa sobre el ángulo, tal y como sugiere la expresión (4.228). El procedimiento es el siguiente:

El usuario marca a través del joystick unas referencias de velocidad de giro para cada rotor, tal y como ya se ha explicado. Cuando actúa sobre la palanca de avance<sup>26</sup>, el control actúa transformando esas referencias de velocidad de giro en referencias angulares.

$$\phi^{\text{ref}} = \frac{-\Omega_1^{\text{ref}} + \Omega_2^{\text{ref}} + \Omega_3^{\text{ref}} - \Omega_4^{\text{ref}}}{4} \quad (4.230)$$

<sup>26</sup> El apartado 4.5 presenta una explicación más detallada del manejo del joystick.

$$\theta^{\text{ref}} = \frac{\Omega_1^{\text{ref}} + \Omega_2^{\text{ref}} - \Omega_3^{\text{ref}} - \Omega_4^{\text{ref}}}{4} \quad (4.231)$$

La expresión (4.230) es la referencia marcada por el usuario cuando desea que el quadrotor avance en la dirección  $\mathbf{y}_b$  positiva (giro positivo en el eje  $\mathbf{x}_b$ ). La expresión (4.231) indica la referencia para el avance en la dirección  $\mathbf{x}_b$  positiva (giro negativo en el eje  $\mathbf{y}_b$ ). El sistema de control será el siguiente:

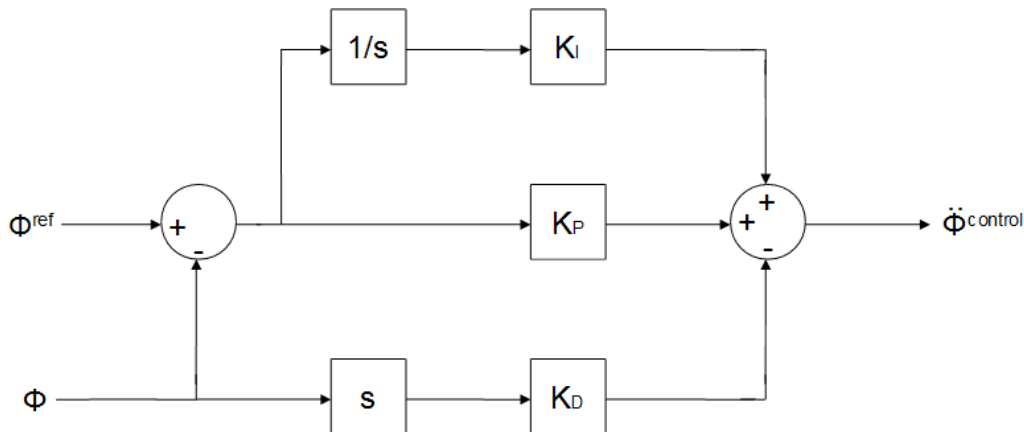


Figura 4.39

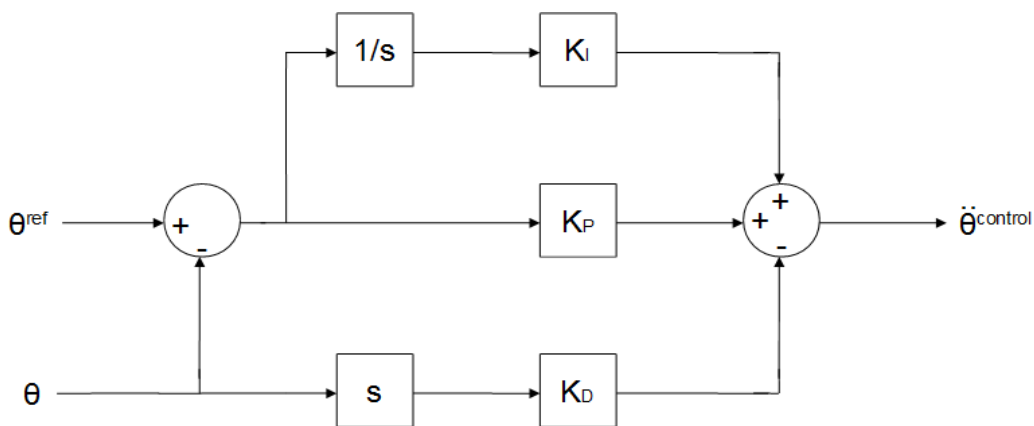


Figura 4.40

Los esquemas anteriores presentan una diferencia respecto al tradicional sistema PID en el cual la parte derivativa se calcula a partir del error. La desventaja del tradicional esquema PID es que si la referencia es un escalón, como sucede la mayor parte de las veces cuando el usuario maneja el joystick, la salida de la parte derivativa sería un impulso. Sin embargo, con el sistema propuesto la parte derivativa no produce este efecto. La referencia [8] lleva a cabo una discusión más detallada de la explicación anterior.

Se hace necesario a continuación implantar un método que permita pasar la salida del control ( $\text{rad/s}^2$ ) a magnitud de velocidad de giro ( $\text{rad/s}$ ).

Es posible estimar el momento de las aceleraciones angulares de salida de la siguiente manera:

$$\mathbf{M}_x^{\text{control}} = I_{xx} \ddot{\phi}^{\text{control}} \quad (4.232)$$

$$\mathbf{M}_y^{\text{control}} = I_{yy} \ddot{\theta}^{\text{control}} \quad (4.233)$$

Ahora bien, estos momentos que permiten el control del quadrotor son creados por la fuerza de empuje de los rotores.

$$\mathbf{M}_x^{\text{control}} = \mathbf{T}_x^{\text{control}} \mathbf{b}_y \quad (4.234)$$

$$\mathbf{M}_y^{\text{control}} = \mathbf{T}_y^{\text{control}} \mathbf{b}_x \quad (4.235)$$

Los empujes anteriores se relacionan con la velocidad de giro a través de la *Carta de navegación* de empuje. Por simplificar el cálculo, se toma la siguiente relación entre empuje y velocidad de giro, que puede obtenerse fácilmente de la citada *Carta de navegación*.

$$\mathbf{T}_x^{\text{control}} = k_T \Omega_x^2 \quad (4.236)$$

$$\mathbf{T}_y^{\text{control}} = k_T \Omega_y^2 \quad (4.237)$$

De las expresiones anteriores se obtiene la velocidad de giro de control:

$$\Omega_x^{\text{control}} = \text{sign}(\ddot{\phi}^{\text{control}}) \sqrt{\frac{I_{xx} |\ddot{\phi}^{\text{control}}|}{b_y k_T}} \quad (4.238)$$

$$\Omega_y^{\text{control}} = \text{sign}(\ddot{\theta}^{\text{control}}) \sqrt{\frac{I_{yy} |\ddot{\theta}^{\text{control}}|}{b_x k_T}} \quad (4.239)$$

Las expresiones (4.238) y (4.239) relacionan la salida del control con una magnitud física propia de los motores, la velocidad de giro. No obstante, queda determinar cual es la velocidad de giro definitiva de salida del control, ya que las fórmulas anteriores únicamente determinan cual debe ser el incremento, o decremento, por efecto del control, pero no determinan el valor concreto de la magnitud.

$$\Omega_1^{\text{ref control}} = \frac{\Omega_1^{\text{ref}} + \Omega_3^{\text{ref}}}{2} - \Omega_x^{\text{control}} + \Omega_y^{\text{control}} \quad (4.240)$$

$$\Omega_2^{\text{ref control}} = \frac{\Omega_2^{\text{ref}} + \Omega_4^{\text{ref}}}{2} + \Omega_x^{\text{control}} + \Omega_y^{\text{control}} \quad (4.241)$$

$$\Omega_3^{\text{ref control}} = \frac{\Omega_1^{\text{ref}} + \Omega_3^{\text{ref}}}{2} + \Omega_x^{\text{control}} - \Omega_y^{\text{control}} \quad (4.242)$$

$$\Omega_4^{\text{ref control}} = \frac{\Omega_2^{\text{ref}} + \Omega_4^{\text{ref}}}{2} - \Omega_x^{\text{control}} - \Omega_y^{\text{control}} \quad (4.243)$$

Las expresiones anteriores toman la media de las velocidades de referencia indicadas por el usuario de aquellos rotores que giran en el mismo sentido (1 y 3 por un lado, 2 y 4 por otro) y modifican este valor con las velocidades obtenidas del control.

Es importante recordar que las velocidades obtenidas en las expresiones (4.240), (4.241), (4.242) y (4.243) en un instante de tiempo  $t$  no son las que realmente lleva el quadrotor, en general, sino que sirven de entrada al modelo de los motores estudiado en el apartado 4.4.5. Así pues, en cada instante de tiempo se tienen tres velocidades de giro distintas para cada rotor que representan conceptos distintos.

- $\Omega_i^{\text{ref}}$ : Referencia introducida por el usuario a través del joystick.
- $\Omega_i^{\text{ref control}}$ : Referencia dada por el control tomando como entrada  $\Omega_i^{\text{ref}}$ .
- $\Omega_i$ : Velocidad de giro real dada por el modelo de los motores tomando como entrada  $\Omega_i^{\text{ref control}}$ .

El siguiente ejemplo ayuda a entender las expresiones anteriores. Se supone que el quadrotor se encuentra en vuelo de hover, es decir, se cumple lo siguiente:

$$\Omega_1^{\text{ref}} = \Omega_2^{\text{ref}} = \Omega_3^{\text{ref}} = \Omega_4^{\text{ref}} = \Omega_{\text{hover}} \quad (4.244)$$

Por tanto, los ángulos de referencia de entrada al control son 0 de acuerdo a las expresiones (4.230) y (4.231). Bajo la hipótesis de que no existía giro previo la salida del control, dada por las expresiones (4.238) y (4.239), es nula. Entonces se deduce fácilmente que las expresiones de entrada de velocidad de giro (expresiones (4.240), (4.241), (4.242) y (4.243)) al modelo de los motores son también la velocidad de hover.

$$\Omega_1^{\text{ref control}} = \Omega_2^{\text{ref control}} = \Omega_3^{\text{ref control}} = \Omega_4^{\text{ref control}} = \Omega_{\text{hover}} \quad (4.245)$$

Así pues, tras un periodo de tiempo dado por las características de los motores se alcanzará la velocidad de hover de manera real.

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_4 = \Omega_{\text{hover}} \quad (4.246)$$

Supóngase a continuación que el usuario decide realizar un vuelo de avance en la dirección  $\mathbf{x}_b$  positiva. Entonces, las referencias mandadas son las siguientes:

$$\begin{aligned} \Omega_1^{\text{ref}} &= \Omega_2^{\text{ref}} = \Omega_{\text{hover}} - \Delta \Omega \\ \Omega_3^{\text{ref}} &= \Omega_4^{\text{ref}} = \Omega_{\text{hover}} + \Delta \Omega \end{aligned} \quad (4.247)$$

Los valores de entrada al control serían:

$$\phi^{\text{ref}} = 0 \quad (4.248)$$



$$\theta^{\text{ref}} = -\Delta\Omega \quad (4.249)$$

La expresión (4.249) indica giro negativo en el eje  $y_b$  para avanzar en la dirección positiva de  $x_b$ . De (4.248) se deduce que (4.238) se anula. Finalmente, las velocidades de giro mandadas como referencia al modelo de los motores serán:

$$\Omega_1^{\text{ref control}} = \Omega_{\text{hover}} + \Omega_y^{\text{control}} \quad (4.250)$$

$$\Omega_2^{\text{ref control}} = \Omega_{\text{hover}} + \Omega_y^{\text{control}} \quad (4.251)$$

$$\Omega_3^{\text{ref control}} = \Omega_{\text{hover}} - \Omega_y^{\text{control}} \quad (4.252)$$

$$\Omega_4^{\text{ref control}} = \Omega_{\text{hover}} - \Omega_y^{\text{control}} \quad (4.253)$$

En las expresiones anteriores, el término de salida del control dado por (4.239) tiende a ser negativo (ya que la referencia lo era) y se comprueba así que el control mandaría unas referencias al modelo de los motores en las que las velocidades de los rotores 3 y 4 son iguales entre ellas, y mayores a las de los rotores 1 y 2, que también son iguales entre ellas.

Se puede realizar un análisis similar al anterior para el vuelo de avance en la dirección  $y_b$ . Por otro lado, el control no tiene efecto alguno cuando se realiza un movimiento de autorrotación, ya que las expresiones (4.230) y (4.231) se anulan cuando el usuario introduce la misma referencia para los rotores 1 y 3, distinta a su vez a la de los rotores 2 y 4 que son iguales entre ellas.

La selección de las constantes  $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$  del control se han tomado a través de pruebas de simulación. Los valores escogidos son los siguientes:

$$\begin{aligned} K_p &= 0.0001 \\ K_i &= 0.00003 \\ K_d &= 0.0001 \end{aligned} \quad (4.254)$$

Es conveniente señalar de nuevo que no se afirma aquí que los parámetros de control anteriores sean los óptimos para un determinado tipo de quadrotor, y mucho menos, para cualquier modelo configurado por el usuario. Se trata de dar solución a la inherente inestabilidad asociada al quadrotor durante el vuelo de avance. Un estudio más detallado de los parámetros del control en función de la masa, la inercia, los brazos, etc... se escapa de los objetivos del presente proyecto, pero no cabe duda de que resultaría de interés para futuros trabajos.

#### 4.4.9 Interacción con el suelo: Corrección del modelo dinámico

Las ecuaciones que rigen el comportamiento del helicóptero durante el vuelo se ven modificadas cuando éste entra en contacto con el suelo.

En la situación de despegue, el quadrotor se sitúa sobre el suelo, debido a la fuerza normal que compensa su peso hasta que el empuje de los motores es suficiente como para iniciar el vuelo.

También debe considerarse la fuerza de impacto que se produce cuando el helicóptero cae debido a la pérdida de control del mismo, o cuando la batería se agota.

Por otro lado, el suelo provoca un rozamiento cuando el helicóptero desliza por el mismo tras una caída. De esta manera, el quadrotor frena en contacto con el suelo, reduciendo su velocidad hasta detenerse.

También se tiene en consideración el efecto que tiene el suelo cuando el helicóptero vuela en las proximidades del mismo. Este fenómeno se denomina efecto tierra.

La implementación de estas fuerzas permiten crear un verdadero simulador de vuelo, donde no sólo se introducen las acciones del helicóptero en el aire, sino también el efecto que tiene el suelo.

La programación de estas acciones no ha resultado sencilla. La condición obvia de contacto con el suelo es:

$$z_e = 0 \quad (4.255)$$

Sin embargo, debe recordarse que el bloque de Simulink de la Figura 4.29 imponía como entrada al bloque las fuerzas y momentos en la base del quadrotor, permitiendo obtener la posición, velocidad y aceleración. Es decir, no puede imponerse la condición dada por (4.255) en este bloque.

Habrà que establecer una serie de condiciones alternativas para el cálculo de los efectos del suelo que sean traducidas a fuerzas y momentos, que son las magnitudes admitidas por el bloque de Simulink. Es decir, si en el instante de tiempo  $t$  el helicóptero se encuentra volando (en las proximidades del suelo) se cumplirá:

$$z_e < 0 \quad (4.256)$$

Pero puede suceder que en  $t + \Delta t$  el quadrotor ya no se encuentre volando, sino en contacto con el suelo. Ahora bien, como no puede imponerse la condición dada por la expresión (4.255), entonces podría suceder que en  $t + \Delta t$  la posición del helicóptero cumpliera:

$$z_e > 0 \quad (4.257)$$

La situación dada por la expresión (4.257) carece por completo de sentido físico ya que implica que el helicóptero se encuentra *bajo tierra*, es decir, por debajo del límite que marca el suelo, en otras palabras, lo ha traspasado.

Para solventar este problema se deberá, como se ha dicho, actuar mediante una fuerza que permita al vehículo recuperar un estado que cumpla alguna de las condiciones físicamente posibles que vienen recogidas en las condiciones (4.255) y (4.256).

#### 4.4.9.1 Fuerza de impacto con el suelo

Cuando el helicóptero cae y choca contra el suelo se produce una fuerza que lo impulsa hacia arriba. Es la fuerza de impacto con el suelo.

Las condiciones para que actúe esta fuerza son las siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_e &\geq 0 \\ V_z|_e &> 0.5 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (4.258)$$

La primera condición hace referencia a que el vehículo haya comenzado a traspasar el suelo, en cuyo caso, hay que actuar. La segunda condición establece que para velocidades de caída inferiores a 0.5 m/s, la fuerza de impacto no actúa. En ese caso, la fuerza normal sería la responsable de frenar la caída.

Bajo estas condiciones la fuerza de impacto, actuante en la dirección  $\mathbf{z}_e$ , se estima de la siguiente manera:

$$\mathbf{F}_e^{\text{Imp}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{F}_z^{\text{Imp}} \end{pmatrix}_e \quad (4.259)$$

$$\mathbf{F}_z^{\text{Imp}} = m_{\text{total}} \mathbf{a}^{\text{Imp}} = m_{\text{total}} \mathbf{N}_{\text{random}} \frac{-V_z|_e}{\Delta t} \quad (4.260)$$

La fuerza de impacto se calcula en función de la velocidad en el eje  $\mathbf{z}_e$ . Además se introduce en la expresión la aleatoriedad mediante  $\mathbf{N}_{\text{random}}$ , que es un número entre 0 y 1 dado por Matlab que modeliza la inexactitud del fenómeno.

Finalmente, la expresión (4.259) se escribe en la base del quadrotor:

$$\mathbf{F}_b^{\text{Imp}} = \mathbf{M}_b^e \mathbf{F}_e^{\text{Imp}} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_x^{\text{Imp}} \\ \mathbf{F}_y^{\text{Imp}} \\ \mathbf{F}_z^{\text{Imp}} \end{pmatrix}_b \quad (4.261)$$

Tal y como se deduce de la expresión (2.260), la fuerza de impacto actúa sólo durante unos pocos (quizás uno) pasos de simulación  $\Delta t$ . A medida que el paso disminuye la fuerza calculada aumenta, pero al actuar durante tan breve lapso de tiempo sus efectos apenas son apreciables a simple vista durante la simulación.

#### 4.4.9.2 Fuerza normal

La fuerza normal actúa también en la dirección de  $\mathbf{z}_e$ , es decir, en la perpendicular al suelo. Las condiciones para que actúe esta fuerza son las siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_e &\geq 0 \\ V_z|_e &\leq 0.5 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (4.262)$$

La condición de velocidad es complementaria a la que se impuso para la fuerza de impacto. De esta forma, si actúa la fuerza normal, no actúa la de impacto, y viceversa. Estos criterios permiten frenar la caída del quadrotor en cualquier caso, pero a la vez, se divide el efecto del contacto con la tierra en dos fuerzas desacopladas que sean más fáciles de estudiar.

El cómputo de esta fuerza distingue dos casos. El primero de ellos recoge únicamente la condición de igualdad en la expresión (4.262). Es el caso del despegue. Entonces, la fuerza normal debe actuar hasta que la fuerza de empuje de los rotores es capaz de superar el peso del quadrotor.

$$\mathbf{m}_{\text{total}} \mathbf{g} \geq \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_4 \quad (4.263)$$

Bajo la condición (4.263), la fuerza normal tomaría el siguiente valor.

$$\mathbf{F}_e^N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{F}_z^N \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mathbf{m}_{\text{total}} \mathbf{g} + \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_4 \end{pmatrix}_e \quad (4.264)$$

La expresión anterior permitiría hacer nula la fuerza neta actuante sobre el helicóptero hasta que el empuje de los cuatro rotores supere al peso.

El segundo caso de acción de la fuerza normal es más general y se produce bajo la condición de  $\mathbf{z}_e > 0$ . Entonces, el cómputo se lleva cabo en función del valor de la velocidad del helicóptero en la dirección  $\mathbf{z}_e$ . Es posible calcular la fuerza necesaria para frenar el sistema de la siguiente forma:

$$\mathbf{F}_z^{\text{fren}} = \mathbf{m}_{\text{total}} \mathbf{a}^{\text{fren}} = \mathbf{m}_{\text{total}} \frac{-V_z \mathbf{e}}{\Delta t} \quad (4.265)$$

La expresión anterior muestra que si la velocidad es positiva (hacia el suelo) entonces la fuerza generada es negativa y tiende a sujetar la caída del quadrotor. La fuerza normal aplicada será la siguiente:

$$\mathbf{F}_e^N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{F}_z^N \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{F}_z^{\text{fren}} + \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_4 \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{m}_{\text{total}} \frac{-V_z \mathbf{e}}{\Delta t} + \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_4 \end{pmatrix}_e \quad (4.266)$$

Si la velocidad es negativa, la fuerza de frenado tiende a sujetar la alzada del helicóptero, ya que toma valor positivo. Para evitar que algunos instantes de tiempo la expresión (4.265) tome valores positivos *muy grandes* se compara este valor con la fuerza del peso.

$$\mathbf{m}_{\text{total}} \mathbf{g} \leq \mathbf{F}_z^{\text{fren}} \quad (4.267)$$

Si se cumple la condición (4.267), entonces la expresión (4.266) se modifica para evitar tener valores *muy positivos* que al intentar mantener constante la cota del sistema

aumenten de manera todavía más irreal el valor de  $z_e$ . Así pues, bajo la condición (4.266) la fuerza normal se calcula utilizando la expresión (4.264).

Un estudio detenido de la expresión (4.266) de la fuerza normal concluye que esta puede tomar un valor positivo, lo cual es físicamente irreal. La incongruencia viene derivada una vez más de que la condición de aplicación de fuerza normal no es  $z_e = 0$ , sino la dada por la expresión (4.262). El concepto de fuerza normal pierde aquí su significado como fuerza vertical *hacia arriba*, y actúa en el modelo dinámico más bien como una fuerza de sujeción que trata de amarrar el sistema al suelo. Si no se implementase esta fuerza de manera que pueda tomar valores positivos, la simulación del helicóptero mostraría a este dando pequeños saltos, una vez en contacto con el suelo tras una caída. El proceso sería el siguiente: tras la caída tomaría valores de  $z_e > 0$ , la fuerza normal actuaría siempre con signo negativo hasta levantar el helicóptero otra vez por encima del suelo, es decir, hasta tener  $z_e < 0$ . El sistema caería nuevamente y se repetiría el proceso descrito, dando la sensación de que el quadrotor bota.

Tanto la fuerza de impacto con el suelo, como la fuerza normal son estimaciones poco rigurosas de los fenómenos físicos que describen. Se trata de la mejor solución que se ha encontrado para el problema del contacto con el suelo, pero no se pretende exponer los procedimientos descritos como un modelo teórico aplicable a otras situaciones. Son soluciones particulares para el simulador de vuelo.

Por último, cabe destacar que la condición de fuerza normal dada por la expresión (4.262) impone una restricción para los giros, de manera que estos también queden frenados. De otra forma, el quadrotor seguiría girando con velocidad angular constante. Para detener estos giros se aplican unos momentos de frenado que se computan de la siguiente manera:

$$\mathbf{M}_b^{\text{fren}} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_x^{\text{fren}} \\ \mathbf{M}_y^{\text{fren}} \\ \mathbf{M}_z^{\text{fren}} \end{pmatrix}_b = - \begin{pmatrix} \dot{\phi} I_{xx} \\ \dot{\theta} I_{yy} \\ \dot{\psi} I_{zz} \end{pmatrix}_b \frac{1}{\Delta t} \quad (4.268)$$

#### 4.4.9.3 Fuerza de rozamiento con el suelo

La fuerza de rozamiento con el suelo permite frenar el deslizamiento del helicóptero en el plano definido por los ejes  $x_e$  e  $y_e$  cuando este cae al suelo. De otra forma, el único rozamiento que actuaría sobre el vehículo sería el del aire, que es mucho más pequeño que el provocado por el suelo.

Esta fuerza actúa bajo las mismas condiciones expuestas para la fuerza normal, de manera que si existe fuerza de impacto, tampoco existe fuerza de rozamiento con el suelo.

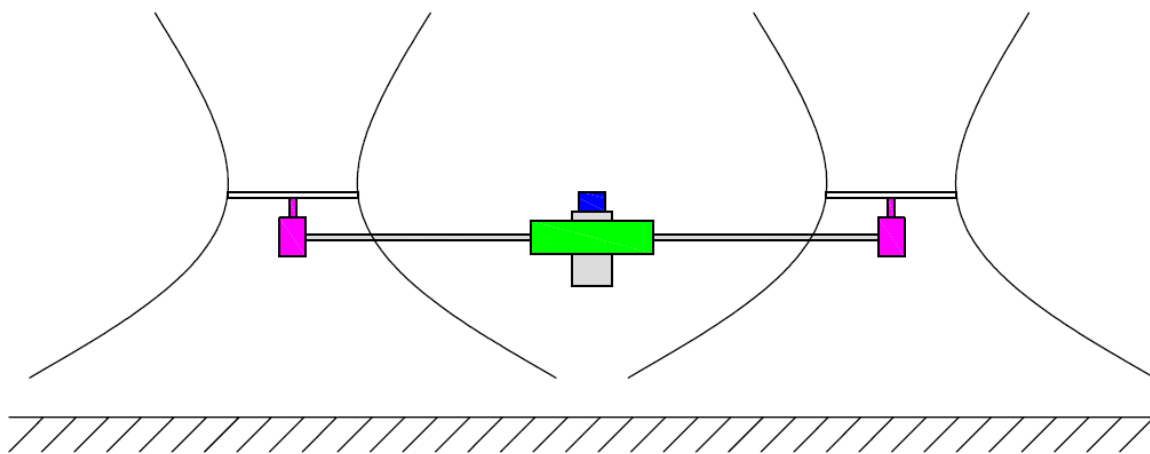
$$\mathbf{F}_e^{\text{roz suelo}} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_x^{\text{roz suelo}} \\ \mathbf{F}_y^{\text{roz suelo}} \\ 0 \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} -F_z^N \mu_{\text{suelo}} \text{sign}(V_x l_e) \\ -F_z^N \mu_{\text{suelo}} \text{sign}(V_y l_e) \\ 0 \end{pmatrix}_e \quad (4.269)$$

El coeficiente de rozamiento con el suelo  $\mu_{\text{suelo}}$  toma un valor fijo de 0.4.

#### 4.4.9.4 Efecto tierra

Es conocido en aeronáutica el efecto que tiene el suelo sobre el sistema cuando este vuela en las proximidades del mismo. Este efecto permite conseguir la sustentación deseada con una menor potencia, al modificar el suelo el contorno del campo de velocidades cuando el rotor se encuentra a una distancia de la tierra comparable a su envergadura.

Existen diversas aproximaciones matemáticas en la bibliografía que tratan de modelizar el efecto tierra. La solución implementada en el modelo dinámico toma como patrón la expuesta en la referencia [7].



Campo de velocidades  
modificado por efecto suelo

Figura 4.41

El empuje calculado en la expresión (4.174) se modifica de la siguiente forma:

$$\mathbf{F}_b^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (-\sum_{i=1}^4 T_i) / \left(1 - \frac{R_{ext}^2}{16 z_e^2}\right) \end{pmatrix}_b \quad (4.270)$$

La expresión anterior es válida para valores de  $z_e$  mayores a  $R_{ext}/2$ , ya que para  $z_e = 0$  y  $z_e = R_{ext}/4$  hay problemas de denominador nulo. De esta forma, cuando el quadrotor está despegando la fuerza de empuje que se computa es mayor que la calculada mediante la expresión (4.174), modelizándose así el efecto tierra.

#### 4.4.10 Estructura del modelo dinámico en Matlab/Simulink

A continuación se presentan los dos principales niveles del archivo de Simulink que contiene el modelo dinámico. La Figura 4.42 muestra principalmente dos bloques. El primero, llamado *Modelo quadrotor* contiene el resto de niveles del archivo. El segundo es

el bloque de la toolbox *Aerospace Blockset* presentado en la Figura 4.29. Cuenta con las siguientes entradas. Por otro lado, en la parte inferior de la figura se sitúan los bloques que establecen la comunicación con LabVIEW.

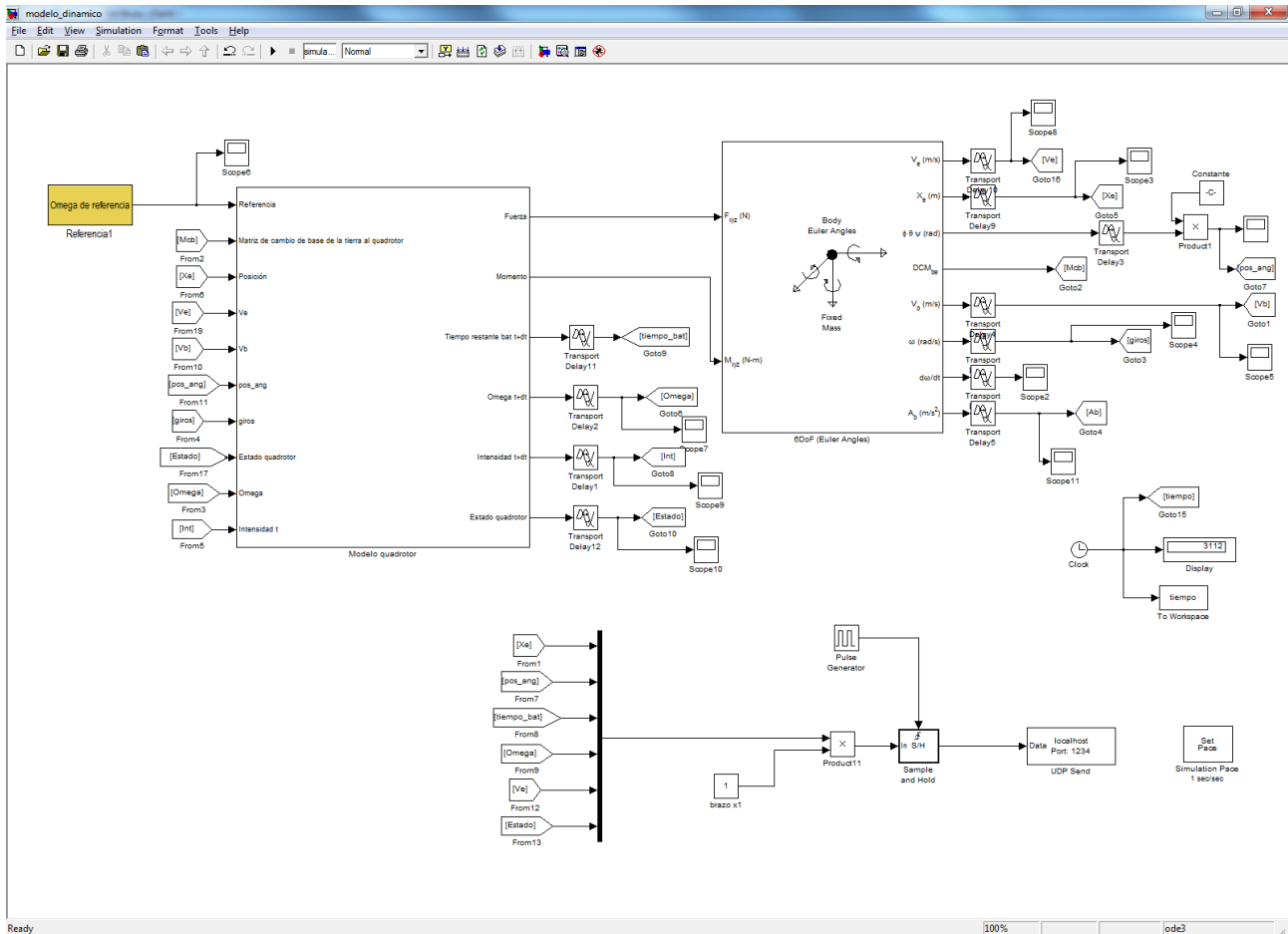


Figura 4.42

El bloque *Modelo dinámico* tiene las siguientes entradas:

- Referencias de giro procedentes de la lectura del joystick  $\Omega_i^{\text{ref}}$ .
- Matriz de cambio de base  $\mathbf{M}_b^e$ .
- Vector de posición lineal del quadrotor en la base de la tierra  $\mathbf{X}_e$ .
- Vector de velocidad lineal del quadrotor en la base de la tierra  $\mathbf{V}_e$ .
- Vector de velocidad lineal del quadrotor en la base del quadrotor  $\mathbf{V}_b$ .
- Vector de ángulos de Euler  $\Phi$ .
- Vector de velocidad angular del quadrotor en la base del quadrotor  $\omega_b$ .
- Variable que indica el estado del quadrotor.
- Velocidad de giro de los rotores  $\Omega_i$ .
- Intensidad de corriente de cada motor  $i_i$ .

Y las siguientes salidas:

- Vector de fuerzas actuantes sobre el quadrotor en la base del quadrotor  $\mathbf{F}_b$ .
- Vector de momentos actuantes sobre el quadrotor en la base del quadrotor  $\mathbf{M}_b$ .

- Tiempo restante de batería  $t_{bat}^{res}$ .
- Variable que indica el estado del quadrotor.
- Velocidad de giro de los rotores  $\Omega_i$ .
- Intensidad de corriente de cada motor  $i_i$ .

La variable que indica el estado del quadrotor puede tomar los siguientes valores:

- 0: Indica quadrotor averiado. El criterio para determinar que el helicóptero está averiado es que tras la caída alguno de los ángulos  $\theta$  o  $\phi$  sea mayor que  $20^\circ$ .
- 1: Indica quadrotor funcionando sin ninguna otra indicación.
- 2: Indica quadrotor con batería agotada.
- 3: Indica quadrotor funcionando en régimen de pérdidas.

Dentro del bloque *Modelo quadrotor* se tiene la siguiente estructura representada en la Figura 4.43. En este nivel se tienen los siguientes bloques, que realizan los cálculos explicados en los apartados anteriores.

- Modelo cinemático.
- Modelo controlador.
- Modelo dinámico.
- Modelo batería.
- Modelo motores.
- Fuerza en body axes.
- Momento en body axes.
- Estado del quadrotor.

Para consultar los niveles de menor jerarquía se recomienda acceder a la carpeta de archivos que se adjunta con el presente documento. El archivo de Simulink llamado *modelo\_dinamico.mdl* se encuentra en esta carpeta.

Por otro lado, la resolución de las ecuaciones dinámicas a través de Simulink se realiza utilizando la función *ode3* que requiere paso fijo. Esta función utiliza el método Bogacki – Shampine. Tampoco es objeto de este proyecto estudiar las diferentes alternativas matemáticas para la resolución del problema. Se deja indicado para futuros trabajos que el método Bogacki – Shampine es un método Runge – Kutta de tercer orden con cuatro etapas.



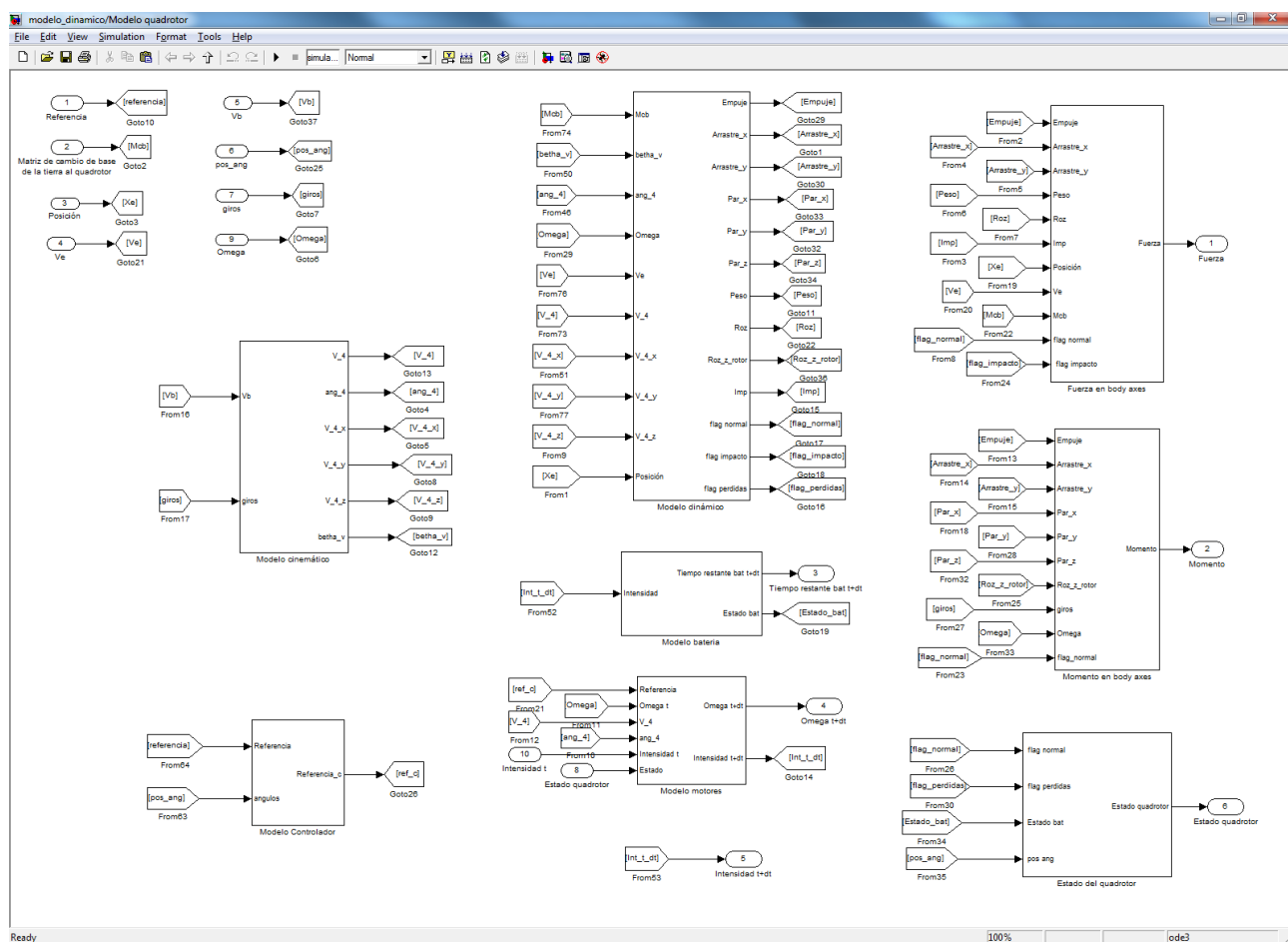


Figura 4.43

## 4.5 Simulación en tiempo real

La última de las cuatro etapas del trabajo es la simulación en tiempo real. Esta es la parte de mayor contenido visual y consiste en la representación del vuelo del quadrotor y de los datos asociados en tiempo real.

Puede entenderse como un proceso en el cual las entradas son el resultado del modelo dinámico y cuya salida es la interface gráfica que presenta el ordenador.

En este apartado se hablará de los siguientes aspectos:

- Implementación del concepto de tiempo real.
- Lectura de datos a través del joystick.
- Conexión de Matlab y LabVIEW.
- Diseño de las ventanas de visualización y del panel de control.

### 4.5.1 Implementación del concepto de tiempo real

El concepto de tiempo real hace referencia a que se cumpla la siguiente afirmación: "Un

*segundo de simulación es igual a un segundo de la vida real*". Esto implica que el comportamiento del helicóptero que observa el usuario a través de la pantalla del ordenador sea similar, en lo relativo al tiempo que cuesta ejecutar una acción, al que vería en la realidad.

Por tanto, si en la práctica al helicóptero le cuesta uno o dos segundos despegar, en la simulación también; si la batería tarda en agotarse 10 minutos reales, entonces tras 10 minutos de simulación el vehículo carecería de la fuente de energía que permite alimentar los motores, etc...

De la misma manera, cuando el usuario maneja el joystick debe ver por pantalla que el simulador representa los movimientos que se están indicando sin ningún retraso, es decir, en tiempo real. De otra forma, el simulador perdería todo realismo y el éxito de las partes anteriores (modelización aerodinámica, modelización del quadrotor y modelo dinámico) carecería por completo de sentido.

Se denota como  $t_{sim}$  al tiempo de la simulación, y por  $t_{real}$  al tiempo que transcurre en el mundo real. El tiempo de simulación es el tiempo que tarda el ordenador en realizar las siguientes operaciones:

- Lectura de datos a través del joystick ( $t_1$ ).
- Cálculos del modelo dinámico ( $t_2$ ).
- Envío de datos a LabVIEW ( $t_3$ ).
- Representación de los datos ( $t_4$ ).
- Otras operaciones que realiza el ordenador ( $t_5$ ).

Matemáticamente se puede expresar como:

$$t_{sim} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 \quad (4.271)$$

En general, el tiempo de la simulación  $t_{sim}$  es diferente al tiempo que transcurre en el mundo real  $t_{real}$ . Si el primero es mayor que el segundo, la simulación requiere más tiempo para ejecutar acciones y la simulación no se realiza en tiempo real.

Pero si  $t_{sim} < t_{real}$  entonces la simulación se realiza en tiempo real si se añade un tiempo de espera  $t_{esp}$ . Es decir, se cumple la siguiente expresión:

$$t_{sim} + t_{esp} = t_{real} \quad (4.272)$$

Lo que realmente hace aumentar el tiempo de la simulación  $t_{sim}$ , son los cálculos del modelo dinámico  $t_2$  y la representación de los datos  $t_4$ , siendo el resto de tiempos despreciables frente a estos dos.

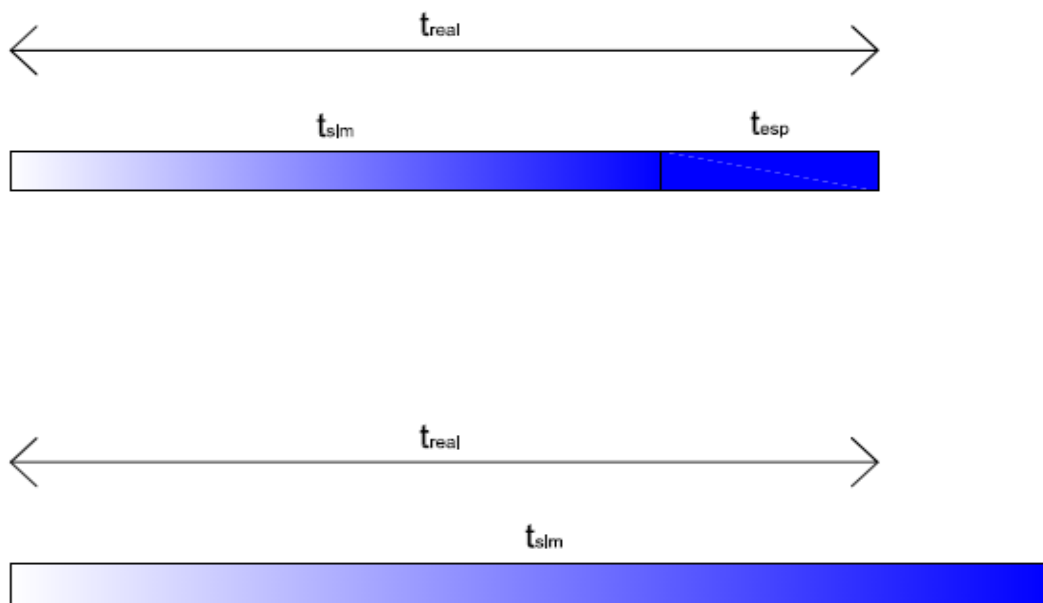
Cuanto más pequeño sea el paso de simulación escogido  $\Delta t$ , mayor cantidad de operaciones debe realizar el ordenador durante la misma. Pero el tiempo de la simulación  $t_{sim}$ , es decir, el tiempo que tarda en hacer las operaciones que requiere cada paso de simulación  $\Delta t$  es independiente de dicho paso. Por eso, si se escoge un  $\Delta t$  demasiado pequeño, el ordenador no será capaz de cumplir  $t_{sim} < t_{real}$  y la simulación no se realizará en tiempo real.

Como puede deducirse de la explicación anterior, para cada paso de simulación se debe cumplir:

$$t_{sim} + t_{esp} = t_{real} = \Delta t \quad (4.273)$$

Si disminuye  $\Delta t$ , también lo hace  $t_{esp}$ . En el caso límite se anula el tiempo de espera. Si sigue disminuyendo el paso de la simulación,  $t_{esp}$  tomaría un valor negativo (matemáticamente según la expresión (4.273)) lo cual es absurdo. Esto significa que la simulación no se puede ejecutar en tiempo real.

La Figura 4.44 representa los diferentes casos posibles. La primera línea temporal representa una simulación que puede ejecutarse en tiempo real, la segunda no.



**Figura 4.44**

En la práctica, se desconoce si un modelo dinámico implementado puede ejecutarse o no en tiempo real, ya que hasta que no se realizan simulaciones no puede determinarse si *sobra tiempo* ( $t_{esp} > 0$ ) o *falta tiempo* ( $t_{esp} < 0$ ).

En cualquier caso, la experiencia ha dictaminado que lo mejor es no esperar a tener todo el modelo dinámico completado para realizar simulaciones. De esta manera se puede ir comprobando si el ordenador es capaz de ejecutar el proceso en tiempo real. Si puede llevarse a cabo, entonces hay vía libre para seguir completando el modelo. Si no se ejecuta en tiempo real, hay que buscar una solución. Las principales alternativas que pueden emplearse son:

- Reducir el número de operaciones matemáticas que realiza el modelo dinámico para reducir  $t_{sim}$  disminuyendo  $t_2$ . Esta solución está realizada desde la primera parte del proyecto de forma implícita. La utilización de las *Cartas de navegación* supone la reducción casi total de cálculos aerodinámicos en el modelo dinámico, y el objetivo no es otro que reducir  $t_2$ .

- Escoger adecuadamente la manera de representar los datos para reducir  $t_{sim}$  disminuyendo  $t_4$ . Esta solución se ha implementado al escoger LabVIEW como plataforma que realiza la representación. Este programa utiliza OpenGL que está optimizado para la representación en tres dimensiones. Pero lo que realmente permite minimizar al máximo  $t_4$  es la utilización de dos programas, de tal forma que Matlab se ocupe de los cálculos del modelo dinámico, y LabVIEW de la representación gráfica. Esta última queda desacoplada del resto del programa por la siguiente razón: Matlab y LabVIEW no tienen porqué actualizar sus valores al mismo tiempo. Es decir, puede que sea conveniente que Matlab realice 40 pasos de simulación en un segundo ( $\Delta t = 0.025$  s), pero 40 son demasiadas representaciones gráficas para LabVIEW. Basta con que se actualice la imagen 20 veces por segundo, por ejemplo, para dar la sensación de continuidad en el movimiento. En resumen, la solución escogida permite reducir el tiempo utilizado en la representación gráfica  $t_4$ , ya que por un lado se utiliza una plataforma optimizada para representación en tres dimensiones, y por otro lado porque los cálculos dinámicos son independientes de esta representación<sup>27</sup>.
- Aumentar el paso de la simulación  $\Delta t$  para que  $t_{esp} > 0$ . Esta solución supone darle más tiempo al ordenador para ejecutar los cálculos, y por tanto hacer menos operaciones matemáticas a lo largo de la simulación. Es evidente que hay que alcanzar un compromiso entre un paso de simulación muy bajo que realice una actualización muy precisa de la posición del quadrotor, frente a un paso de simulación muy grande que aporte una solución de las ecuaciones dinámicas poco fiable.
- Utilizar un paso de simulación  $\Delta t$  variable en lugar de uno fijo para reducir  $t_{sim}$  disminuyendo  $t_2$ . El paso variable toma valores más pequeños cuando la resolución de las ecuaciones da lugar a muchos cambios en las variables a resolver como transitorios, mientras que toma valores más grandes para situaciones más estables en el tiempo. Esta solución no se ha implementado porque la resolución con paso fijo permitía la adecuada simulación en tiempo real, pero debe contemplarse para futuras extensiones mejoradas del simulador.
- Si las soluciones anteriores no permiten lograr la simulación en tiempo real, se debe plantear el hecho de utilizar un ordenador más potente o varios procesadores en paralelo. No obstante, no ha tenido que llegarse a este extremo en el presente proyecto.

Simulink cuenta con un bloque que permite la simulación en tiempo real, siempre que sea posible. Este se llama *Simulation Pace* y consigue sincronizar el tiempo de la simulación con el tiempo del mundo real.

<sup>27</sup> En un primer momento se implementó la representación gráfica a partir de la herramienta plot de Matlab. Ésta no está precisamente optimizada para representación de objetos en 3 dimensiones y además, al utilizar el mismo programa para realizar los cálculos y las representaciones la simulación en tiempo real era difícil de conseguir.

### 4.5.2 Lectura de datos a través del joystick

Se ha utilizado un joystick comercial<sup>28</sup> como medio para que el usuario maneje el quadrotor. En primer lugar, cabe preguntarse porqué se ha utilizado este dispositivo y no otro. La respuesta es que ni el ratón ni el teclado del ordenador permiten un manejo tan intuitivo como el del joystick. Además, la mayoría de simuladores de vuelo los utilizan.

Matlab es capaz de detectar un joystick conectado al ordenador. A través de la toolbox *Simulink 3D animation* se puede obtener valores numéricos en función de las referencias introducidas con el joystick.

La forma de manejar el quadrotor es la siguiente. El joystick cuenta con una palanca principal A que puede girar 90° y que se utiliza para indicar la potencia de los 4 motores en conjunto. Estrictamente, la palanca no marca la potencia, sino la velocidad de giro de referencia de los motores. Cuando la palanca está bajada totalmente los rotores no giran; si está al máximo la velocidad de giro es la máxima que pueden suministrar los motores.

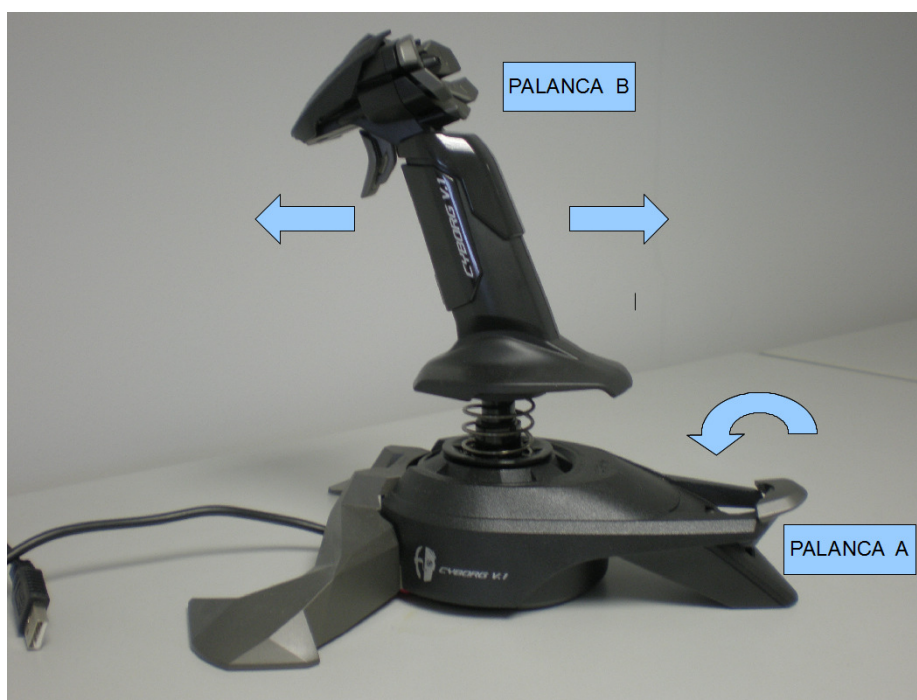


Figura 4.45

Es importante recordar aquí que el joystick no marca la velocidad de giro de los motores en cada instante, sino la velocidad a la cual el usuario quiere que tienda. La velocidad de giro real de cada rotor dependerá de la referencia, la dinámica de los motores y el algoritmo de control implementado.

Por otro lado, la palanca B se utiliza para realizar los vuelos de avance y autorrotación, tal y como se explica en las siguientes figuras.

<sup>28</sup> Se ha escogido el modelo Cyborg V.1 de la marca Saitek pero podía haberse tomado cualquier otro modelo siempre y cuando tenga la posibilidad de realizar las operaciones que se detallan en el apartado.

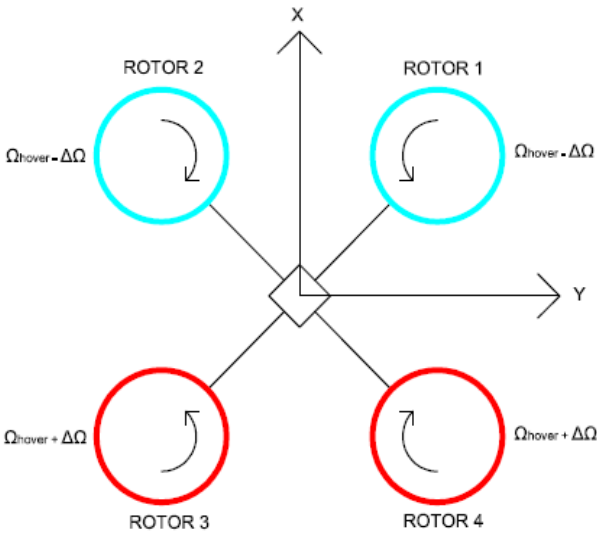


Figura 4.46

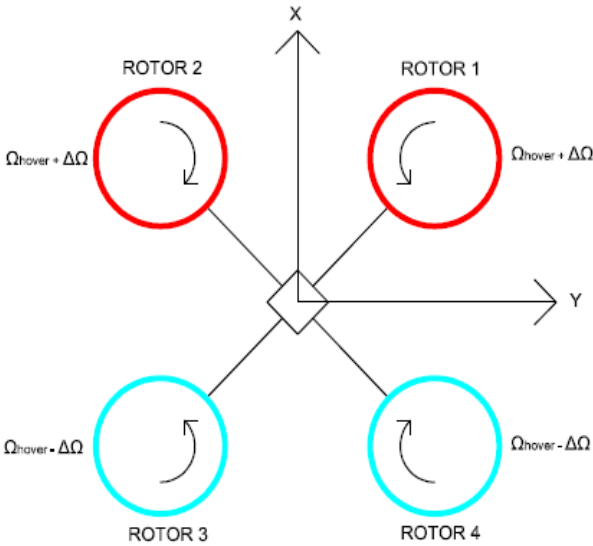
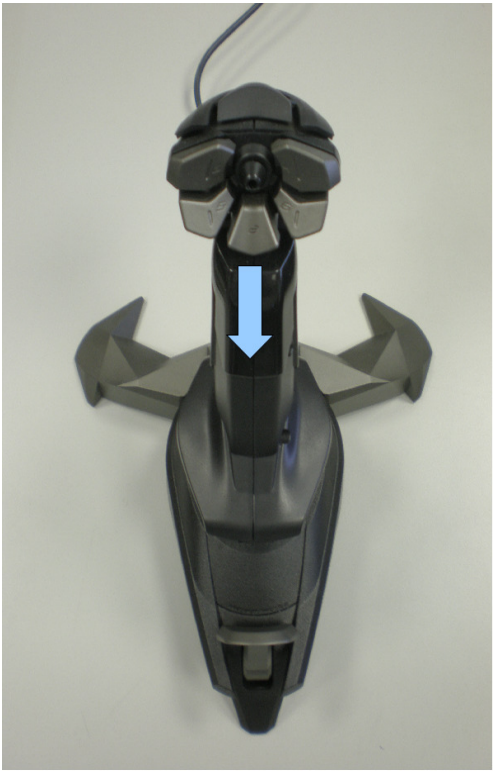


Figura 4.47



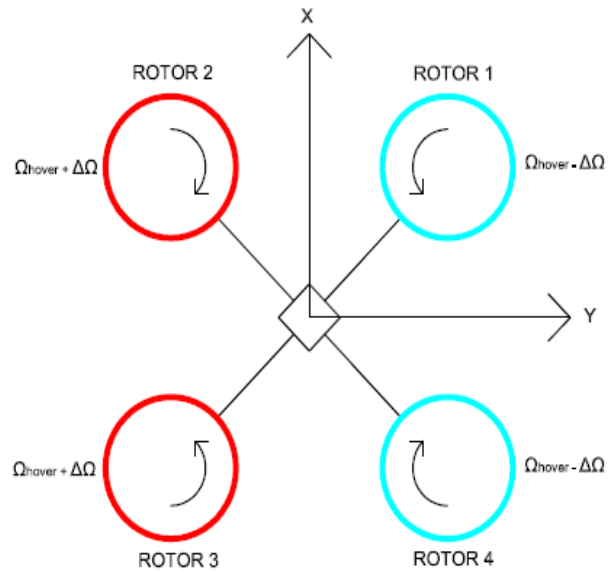
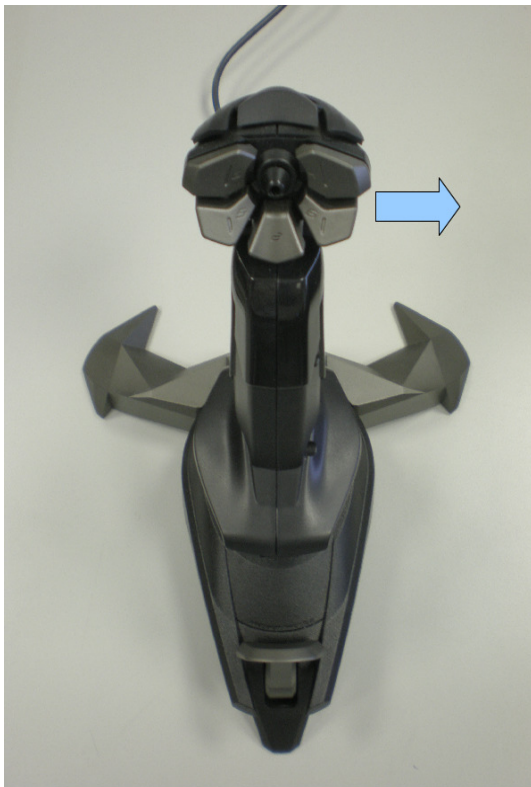


Figura 4.48

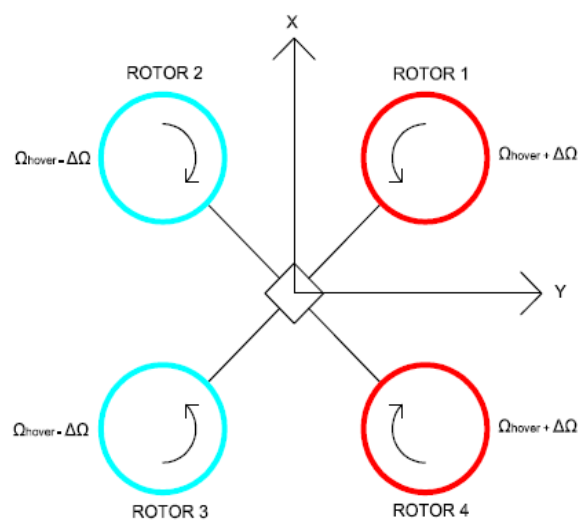
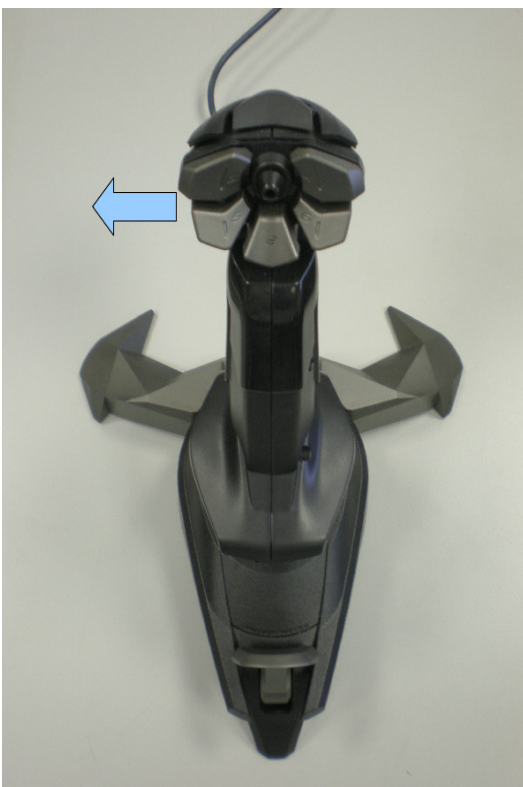


Figura 4.49

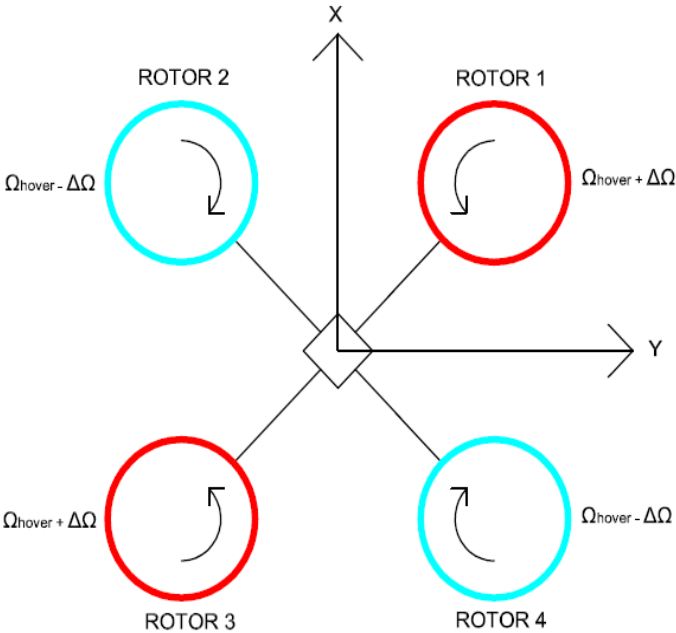
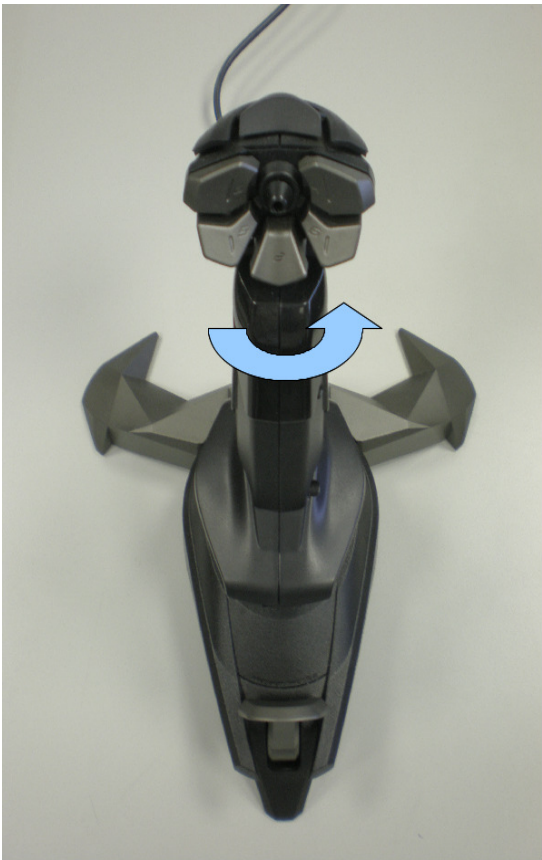


Figura 4.50

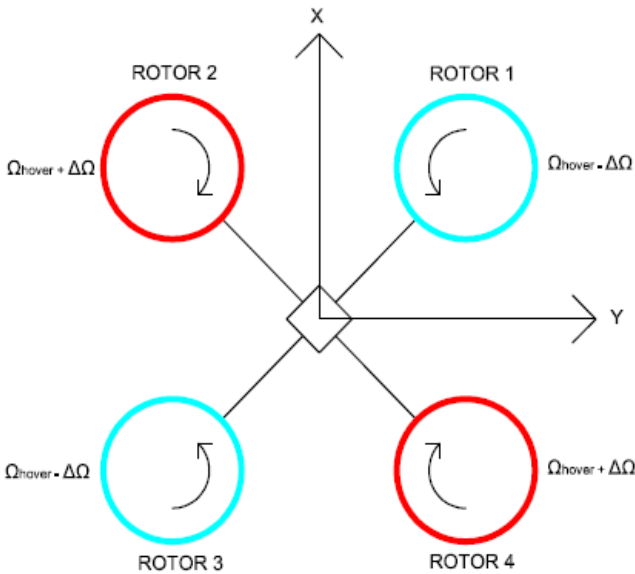
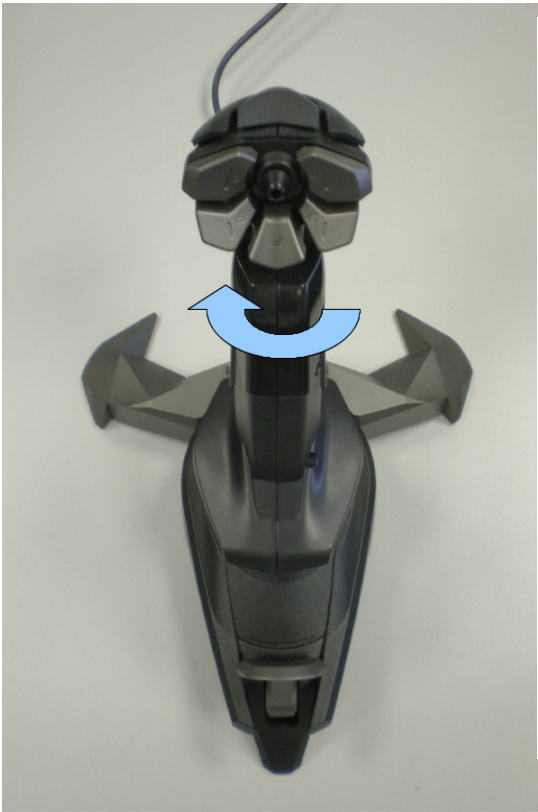


Figura 4.51



### 4.5.3 Conexión de Matlab y LabVIEW

Tal y como se ha comentado, la razón por la cual se ha decidido realizar la representación gráfica en LabVIEW es porque permite que esta se optimice al emplear OpenGL y porque además desacopla la representación del cálculo que ejecuta Matlab.

La conexión se lleva a cabo utilizando el protocolo de comunicación UDP/IP que permite enviar datos en tiempo real. Las variables que se mandan a LabVIEW son las siguientes:

- Vector de posición lineal del quadrotor en la base de la tierra  $\mathbf{X}_e$ .
- Vector de posición angular del quadrotor en la base de la tierra  $\Phi_e$ .
- Vector de velocidad lineal del quadrotor en la base de la tierra  $\mathbf{V}_e$ .
- Velocidad de giro de los rotores  $\Omega_i$ .
- Tiempo de vida restante de batería  $t_{bat}^{res}$ .
- Variable que indica el estado del quadrotor.

Por tanto, se trata de 15 valores numéricos. El envío no se realiza cada paso de simulación, sino que se actualiza la representación gráfica con menos frecuencia. Surge aquí el concepto de *frames por segundo* (fps) que hace referencia al número de imágenes distintas que se ven por segundo. Cuanto mayor sea este valor, la imagen da una mayor sensación de continuidad en el movimiento, pero el coste computacional también es mayor.

Así pues, se define el tiempo de actualización de imagen  $t_{act}$  como:

$$t_{act} = \frac{1}{fps} \quad (4.274)$$

De esta forma, si se desea que la representación funcione a 20 fps, la imagen se actualizará cada 0.050 s. El usuario del software puede seleccionar los frames por segundo que desee. Este valor es leído por Matlab, que sólo mandará datos a LabVIEW cuando corresponda.

El valor de  $t_{act}$  no es independiente del paso de simulación  $\Delta t$  ya que se debe cumplir que el tiempo de actualización sea un múltiplo entero del paso de simulación. Por ejemplo, si se selecciona la opción de 20 fps esta se corresponde con un tiempo de actualización de imagen de 0.050 s y el paso de simulación podrá ser 0.025 s.

Las opciones implementadas en Matlab son las siguientes:

- 40 fps: Pasos de simulación posibles: 0.0250 s, 0.0125 s.
- 25 fps: Pasos de simulación posibles: 0.0400 s, 0.0200 s, 0.0100 s.
- 20 fps: Pasos de simulación posibles: 0.0500 s, 0.0250 s, 0.0125 s.
- 10 fps: Pasos de simulación posibles: 0.1000 s, 0.0500 s, 0.0250 s, 0.0125 s.

### 4.5.4 Diseño de las ventanas de visualización y del panel de control

En este último apartado se procede a explicar el diseño de la salida gráfica de LabVIEW. Esta consta de dos ventanas de visualización y un panel de control. La Figura 4.52 muestra la interface de usuario.

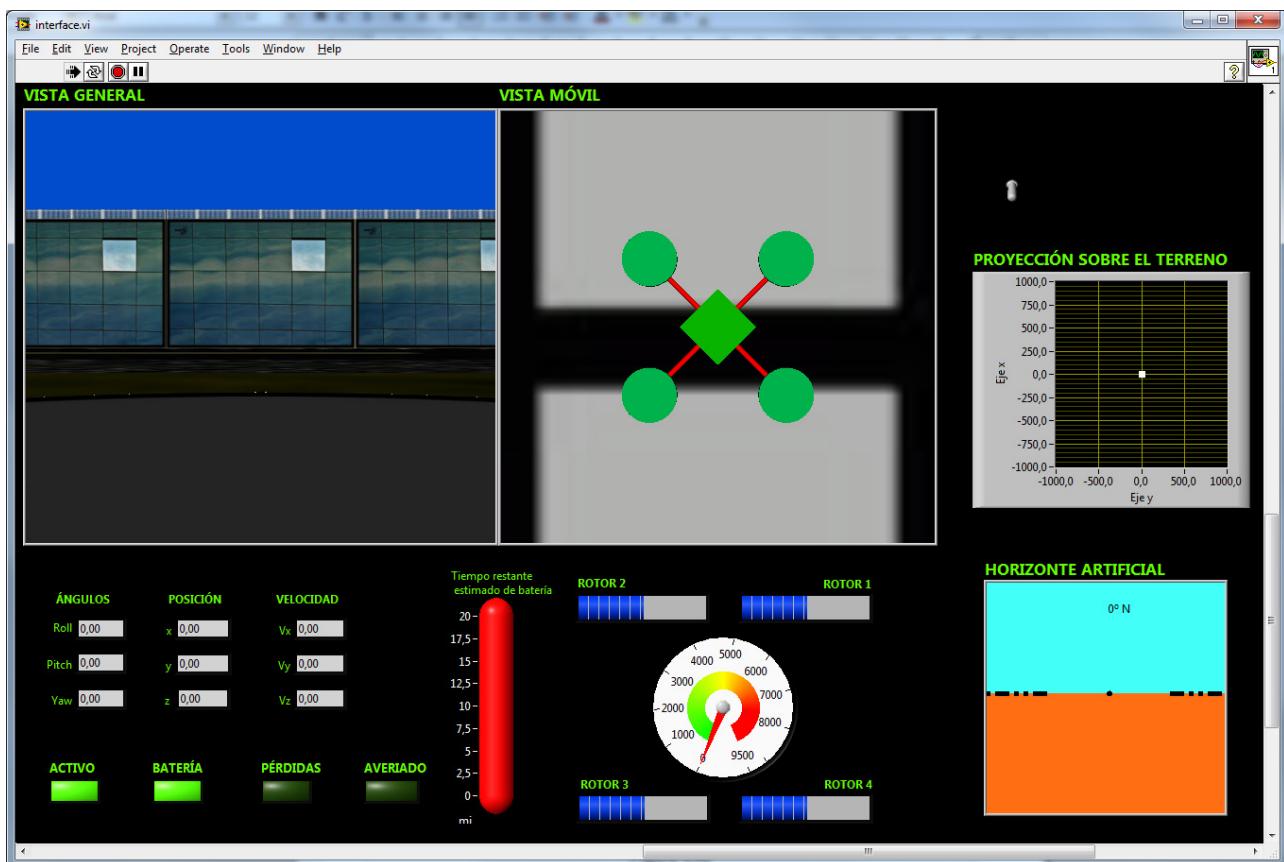


Figura 4.52

Cada ventana de visualización está ligada a una cámara o punto de vista de la imagen. La ventana de la izquierda se llama *VISTA GENERAL*. Tiene su punto de vista fijado al movimiento del quadrotor de manera que esta sigue al helicóptero allá donde vaya. No sólo en posición, sino que también la cámara está asociada al giro del sistema en torno al eje  $z_b$ . De esta forma, si el quadrotor girase  $180^\circ$  sobre si mismo, la cámara también lo haría. Se ha preferido no asociar la cámara con el giro en torno a los otros ejes  $x_b$  e  $y_b$  para tener en todo momento una perspectiva general del entorno que rodea al helicóptero.

La ventana de la derecha se llama *VISTA MÓVIL*. También tiene su punto de vista fijado al movimiento del quadrotor en posición y al giro en torno a  $z_b$ . En este caso, la cámara se sitúa por encima del helicóptero y mira *hacia abajo*, es decir, en la dirección del eje  $z_b$ . Si con la cámara anterior se obtenía una perspectiva general del paisaje, con esta se tiene una visión del entorno que se sitúa por debajo del quadrotor, además de visionar el propio helicóptero.

Por otro lado, el panel de control cuenta con los siguientes elementos:

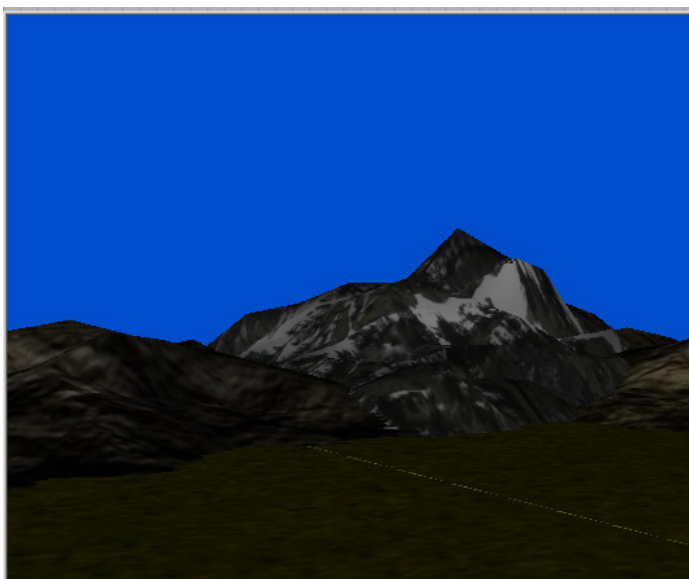
- Panel numérico: Muestra de manera numérica los datos de posición, giros y velocidad del sistema. Los valores que utiliza son los mandados por Matlab.
- 4 LEDs que muestran el estado del quadrotor:
  - ACTIVO: Encendido cuando el quadrotor se encuentra en vuelo.
  - BATERÍA: Encendido cuando la batería no está agotada.

- **PÉRDIDAS:** Encendido cuando el quadrotor vuela en un régimen de pérdidas.
  - **AVERIADO:** Encendido cuando el quadrotor está averiado como consecuencia de una caída.
- Baremo de estimación del tiempo restante de batería: Los valores que utiliza son los mandados por Matlab. Puede activarse o desactivarse antes de la simulación.
  - Panel de estado de los rotores: Está compuesto por una ruleta que marca las revoluciones por minuto medias de los cuatro rotores, y por unas barras asociadas que indican el estado de cada rotor, mostrándose así los incrementos o decrementos de velocidad de giro de los rotores respecto de la media.
  - Mapa de proyección sobre el terreno: Permite al usuario reconer rápidamente dónde se encuentra el quadrotor en el entorno creado.
  - Horizonte artificial: Es una salida gráfica muy habitual en helicópteros reales y simuladores de vuelo. Muestra gráficamente la orientación del sistema.

Por último, dentro del diseño gráfico cabe destacar que se ha creado un entorno para la simulación. Este entorno está compuesto por carreteras, montañas, edificios, un helipuerto, zonas verdes, un campo de fútbol y algún otro elemento adicional. Se han utilizado texturas para conseguir dar mayor sensación de realismo.

La creación de un entorno gráfico de simulación, el empleo de varias cámaras de visualización y el diseño de un panel de control similar a los reales permite obtener el objetivo final: la creación de un simulador de vuelo en tiempo real, que resulta además entretenido y vistoso.

Para terminar se presentan algunas imágenes obtenidas del simulador que muestran parte del entorno gráfico.



**Figura 4.53**

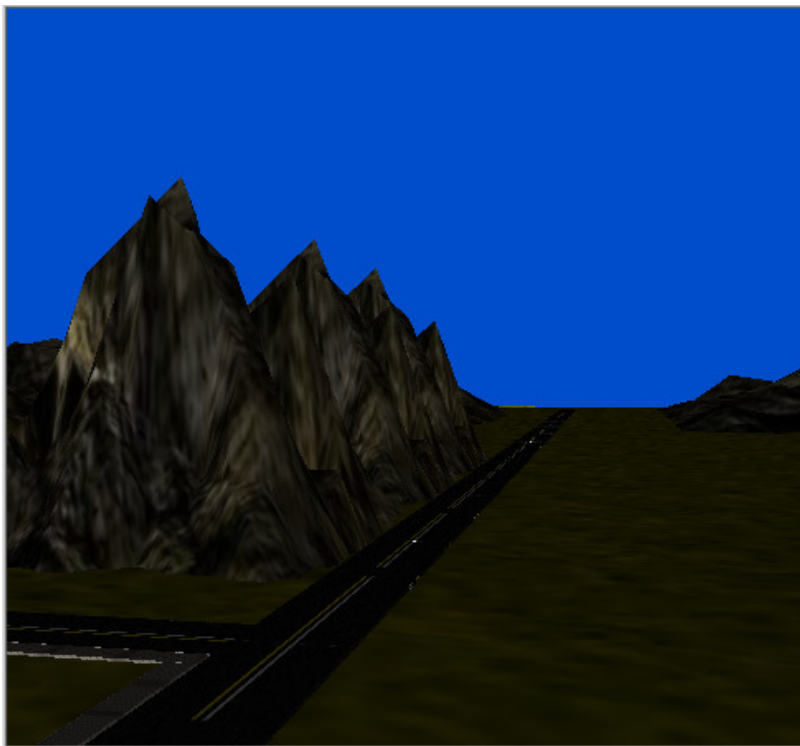


Figura 4.54

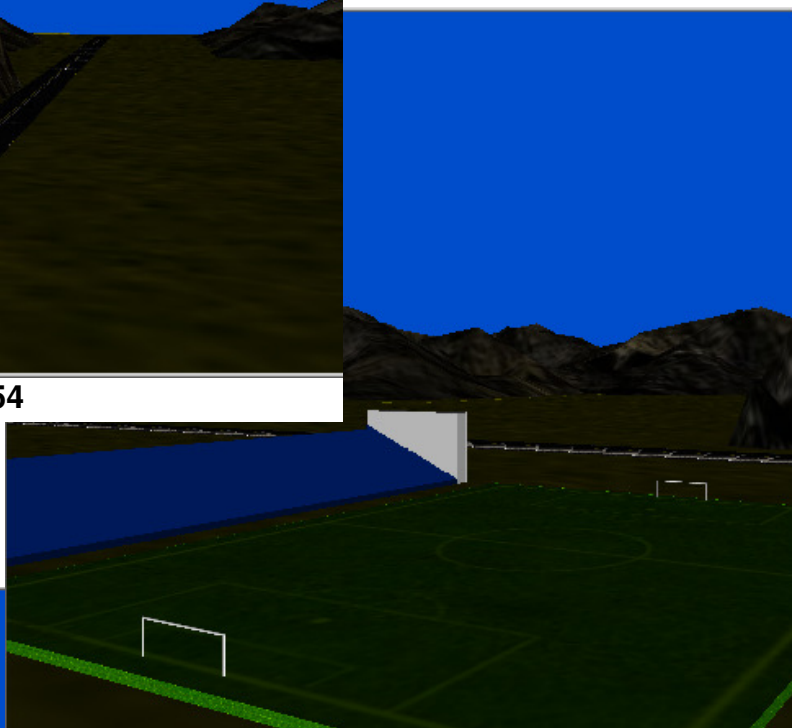


Figura 4.55

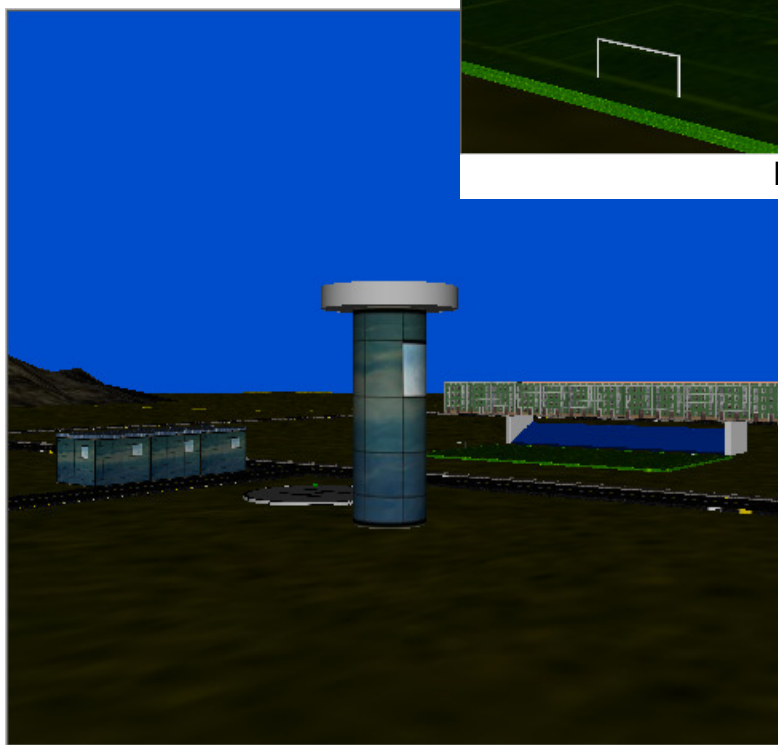


Figura 4.56

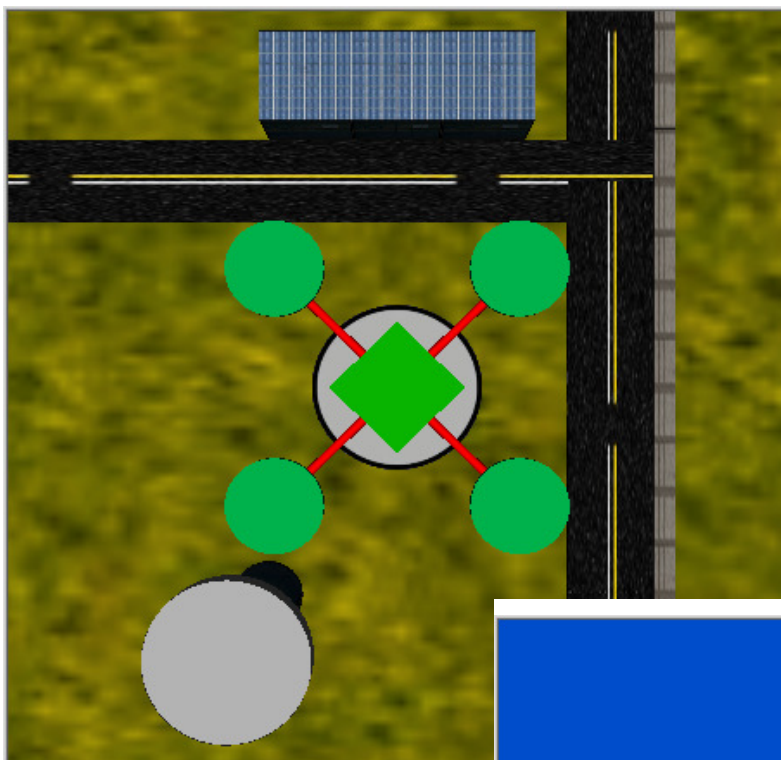


Figura 4.57

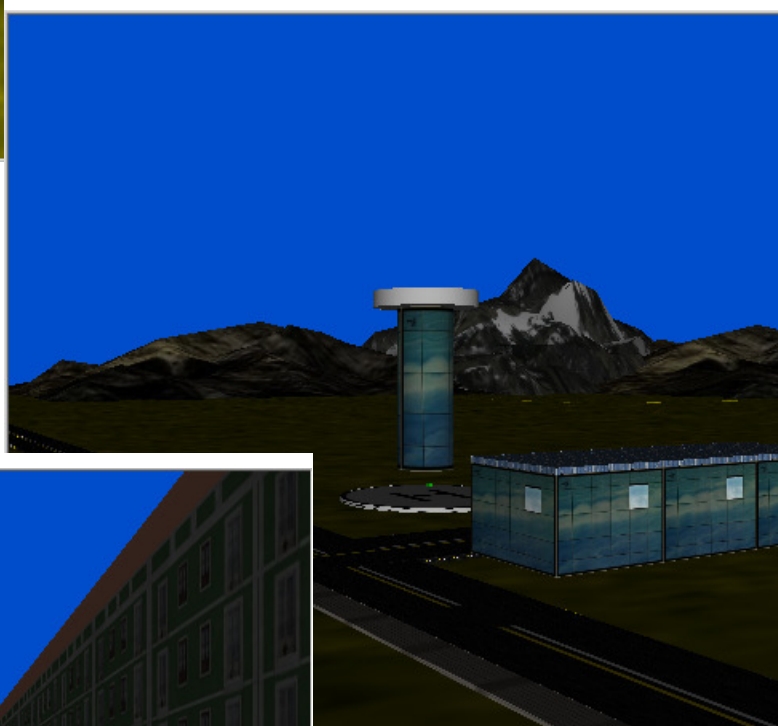


Figura 4.58

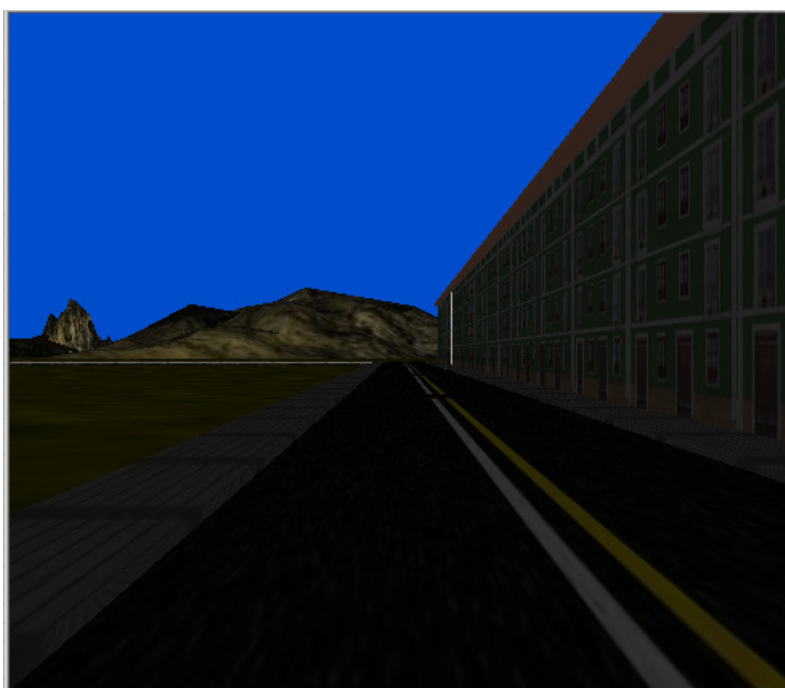


Figura 4.59



## 5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

El presente proyecto final de carrera no tiene como objetivo final el estudio de ningún proceso particular y la obtención de resultados de dicho estudio. El objetivo es el desarrollo de un simulador de vuelo. Por tanto, no se trata de analizar un quadrotor en concreto, un tipo de maniobra o una modificación de la estructura para obtener unos resultados.

Por ello, se considera que este apartado no resulta en si mismo esencial, aunque sí importante, en el desarrollo del simulador. Se ha optado por detenerse a explicar algunos aspectos de interés que han surgido a lo largo del Capítulo 4 y que se han comprobado a partir de las simulaciones. Estos análisis ayudan a entender en profundidad el funcionamiento del helicóptero y algunos de los puntos clave que se deben tener en cuenta, ya no sólo a nivel de simulación, sino incluso desde el punto de vista de diseño mecánico. No obstante, es evidente que los resultados aquí obtenidos deben comprobarse experimentalmente, no sólo a través de simulaciones. Pero dado el alcance de este proyecto, centrado en el desarrollo de un software de modelización y de simulación, los resultados se analizan exclusivamente desde este punto de vista.

Así pues, los aspectos que se analizan son los siguientes:

- Análisis de la distribución de velocidad inducida y ángulo de ataque para la distribución óptima de alabeo.
- Análisis de la situación en pérdidas de las *Cartas de navegación*.
- Análisis de la estabilidad del sistema.
- Análisis de la situación de contacto con el suelo.
- Análisis de la medida de tiempos para la simulación en tiempo real.

### 5.1 Características del quadrotor objeto del análisis

El análisis de resultados se ha realizado para un quadrotor concreto con las siguientes características configuradas mediante el software de modelización:

#### 5.1.1 Modelo del rotor

- Características atmosféricas
  - Densidad del aire:  $\rho = 1.2 \text{ Kg/m}^3$ .
  - Viscosidad dinámica del aire:  $\mu = 1.789\text{e-}5$ .
- Características constructivas de pala
  - Número de palas:  $b = 2$ .
  - Número de pasos de integración:  $n = 10$ .
  - Radio interior:  $R_{\text{int}} = 0.03 \text{ m}$ .

- Radio exterior:  $R_{\text{ext}} = 0.12 \text{ m}$ .
- Distribución de cuerdas: Hiperbólica.
- Cuerda en punta de pala:  $c_{\text{punta}} = 0.01 \text{ m}$ .
- Perfil de pala: ANUX2.
- Distribución de alabeo: Cálculo óptimo a  $\Omega = 700 \text{ rad/s}$  y  $V_z = 0 \text{ m/s}$  (hover).

### 5.1.2 Modelo del quadrotor

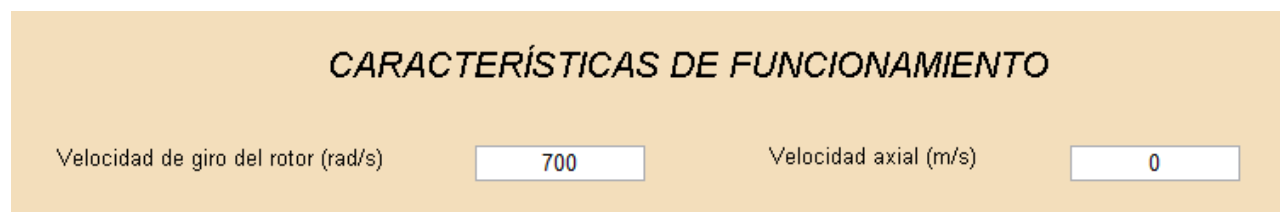
- Material de palas: Magnesio.
- Diseño de la estructura
  - Longitud de la caja central:  $L_{\text{ec}} = 0.15 \text{ m}$ .
  - Material de la caja central: Polipropileno.
  - Longitud de los brazos:  $L_{\text{eb}} = 0.25 \text{ m}$ .
  - Radio exterior de las barras:  $R_{\text{eb}} = 0.005 \text{ m}$ .
  - Ángulo entre brazos:  $\alpha_{\text{cruz}} = 90^\circ$ .
  - Ángulo de inclinación:  $\beta_{\text{cruz}} = 0^\circ$ .
  - Material de los brazos: Magnesio.
- Diseño de la caja de componentes electrónicos
  - Longitud:  $L_e = 0.08 \text{ m}$ .
  - Anchura:  $W_e = 0.08 \text{ m}$ .
  - Espesor:  $H_e = 0.03 \text{ m}$ .
  - Masa:  $m_2 = 0.2 \text{ Kg}$ .
- Elección de los motores
  - Óptimo para  $\Omega_{\text{max}} = 800 \text{ rad/s}$  y  $\eta_{\text{min}} = 65 \%$ .
  - Motor RS 755VC 4540 (Mabuchi).
- Elección de la batería
  - Óptimo para  $t_{\text{min}} = 5 \text{ min}$ .
  - Batería Kokam 2000 mAh.
- Sin carga adicional

## 5.2 Análisis de la distribución de velocidad inducida y ángulo de ataque para la distribución óptima de alabeo

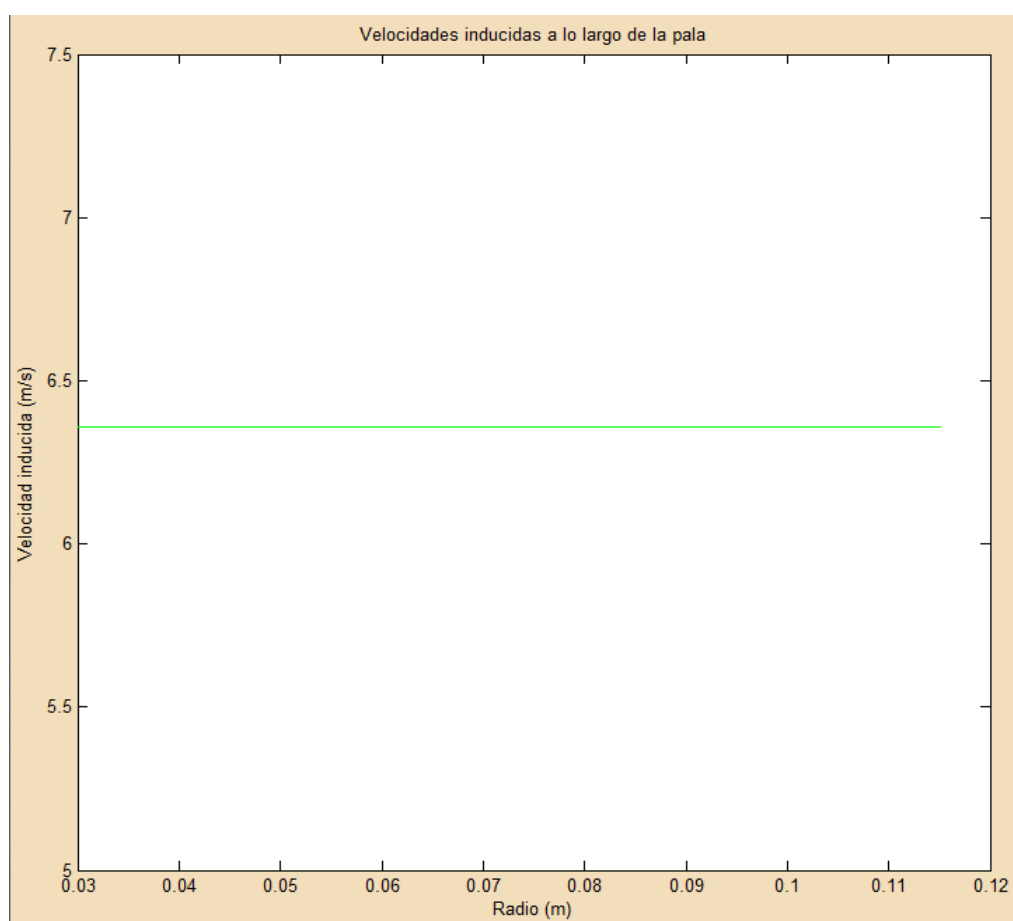
En el apartado 4.2 se dedujo que si se diseñan las palas con alabeo óptimo para régimen de hover, entonces la velocidad inducida es constante a lo largo de la envergadura de la pala para el vuelo en hover (independientemente de si este se logra a la velocidad de giro de diseño del alabeo  $\Omega_{\text{opt}}$  o a otra).

Las figuras que se muestran en este apartado han sido extraídas del software de modelización del rotor.

Si se estudia el régimen de vuelo axial  $\Omega = 700$  rad/s y  $V_z = 0$  m/s que coincide con el de diseño del alabeo el software de modelización muestra que la velocidad inducida es constante a lo largo de toda la envergadura de la pala.



**Figura 5.1**



**Figura 5.2**

El software muestra el valor del ángulo de ataque óptimo obtenido del perfil de pala ANUX2.

|                 |      |
|-----------------|------|
| Alfa óptimo (°) | 4.56 |
|-----------------|------|

**Figura 5.3**

Se comprueba que la distribución de ángulo de ataque a lo largo de la envergadura de la



pala es constante e igual al valor óptimo.

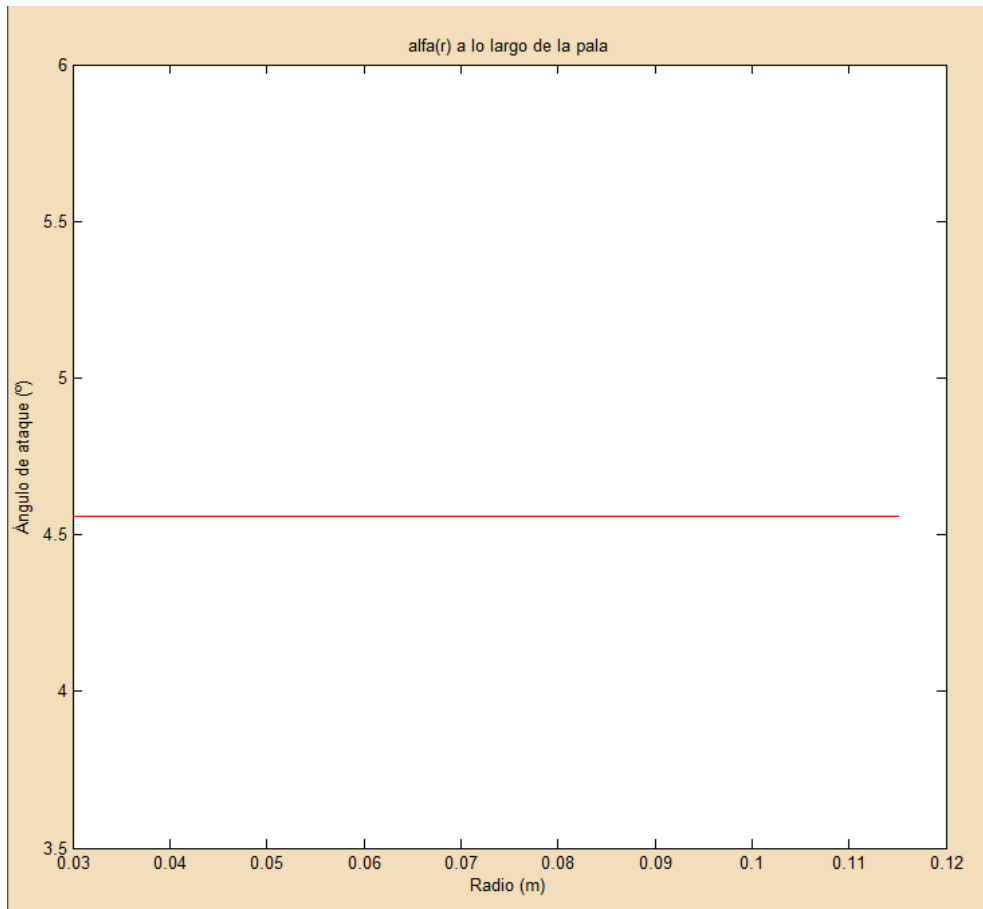


Figura 5.4

Si ahora se estudia otro régimen de funcionamiento en vuelo axial dado por  $\Omega = 800$  rad/s y  $V_z = 0$  m/s, que no coincide con el de diseño del alabeo se obtiene una distribución de velocidad inducida constante, pero de valor distinto al régimen de vuelo anterior.

Sin embargo, la distribución de ángulo de ataque es constante a lo largo de la envergadura de la pala y además, su valor es coincidente con el óptimo.

De esta manera se demuestra que si se diseña la pala para régimen de hover, entonces cuando el quadrotor alcance este régimen lo hará con máxima sustentación y mínima resistencia aerodinámica independientemente del peso del helicóptero. Es decir, no importa la velocidad de giro de los rotores que hace falta para conseguir el vuelo de hover, porque en cualquier caso el ángulo de ataque en planeamiento es el óptimo a lo largo de toda la envergadura de la pala.

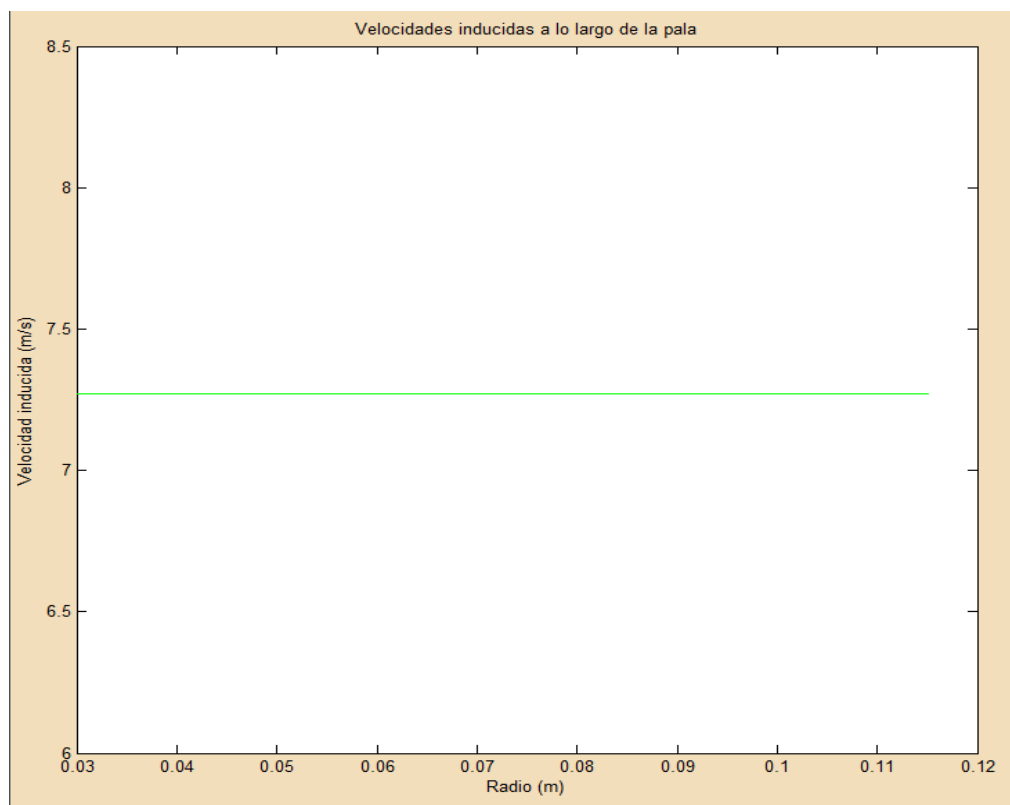


Figura 5.5

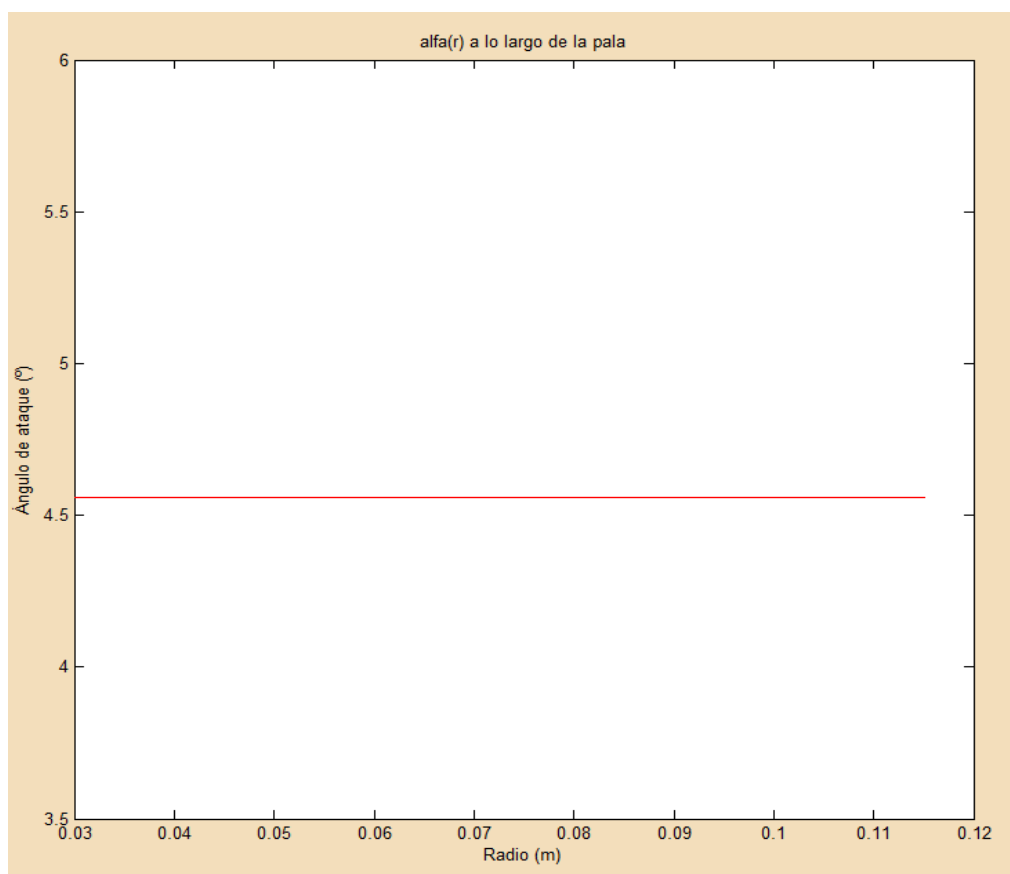


Figura 5.6

La importancia de este hecho es enorme, ya que permite desacoplar el diseño aerodinámico de la modelización del quadrotor, al menos en parte. El diseño del quadrotor, en cuanto a la selección de los motores y la batería principalmente depende directamente del rotor que se seleccione. Como es lógico, no es lo mismo diseñar un rotor con el radio más grande o más pequeño, porque el primero deberá ser alimentado con un motor más potente para producir mayor empuje. Lo mismo puede decirse si se considera un rotor formado por tres o cuatro palas en lugar de dos. La selección del perfil de pala también influye, como es lógico en el comportamiento del quadrotor. Pero el resultado que se ha deducido permite obtener las mejores prestaciones de un perfil una vez que este se selecciona y además da una idea de cómo diseñar las palas en lo referente a su torsión.

### 5.3 Análisis de la situación en pérdidas de las *Cartas de navegación*

Las situaciones de régimen de pérdidas ( $\alpha > \alpha_{\max}$ ) o régimen no definido ( $\alpha < \alpha_{\min}$ ) tienen un tratamiento matemático similar, tal y como se expuso en el Capítulo 4. Ambos casos tienen en común que las curvas características del perfil no están definidas para dichos valores de ángulo de ataque.

La solución tomada hace nula la contribución al empuje de dicho elemento diferencial de área, así como la fuerza tangencial inducida. De esta forma, tan sólo la fuerza tangencial parásita toma valor no nulo para el caso de régimen de pérdidas.

Estas hipótesis provocan la aparición de discontinuidades en la distribución de fuerzas y momentos sobre el rotor.

Para ejemplificar lo anterior se estudia el régimen  $\Omega = 350$  rad/s,  $V_z = -4$  m/s y  $\alpha_v = 60^\circ$  que se trata de un régimen de pérdidas.

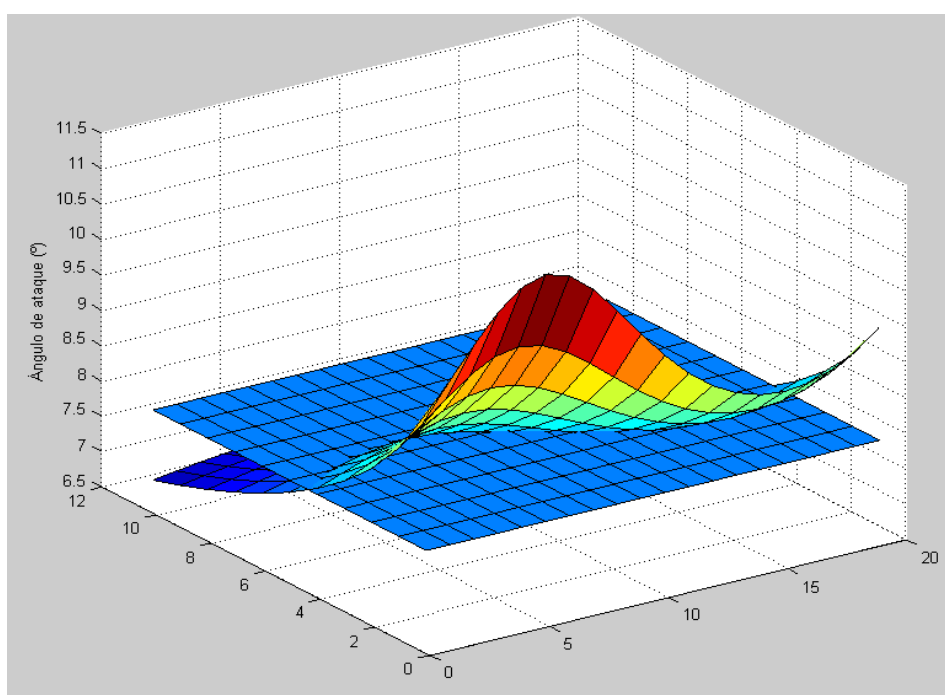
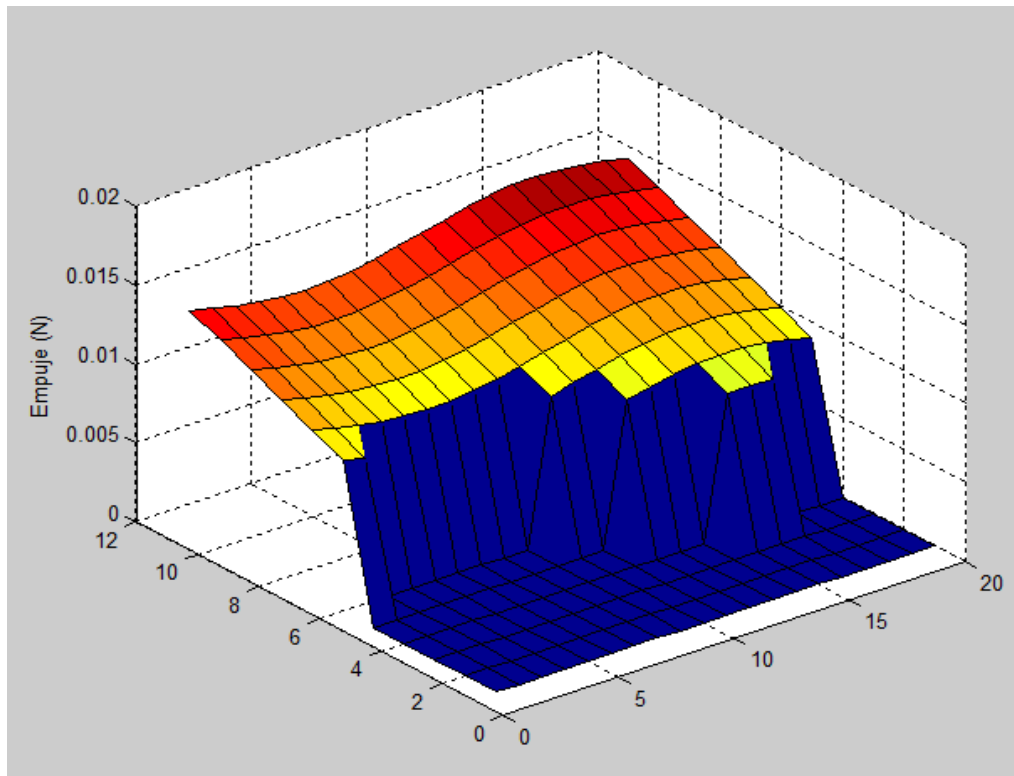


Figura 5.7

La Figura 5.7 representa la distribución del ángulo de ataque para dicho régimen. Un plano se sitúa a la altura de  $\alpha_{\max}$  de manera que los elementos diferenciales situados por encima del plano no generan sustentación.

La distribución de empuje muestra la discontinuidad existente en la transición de una situación a otra<sup>29</sup>.



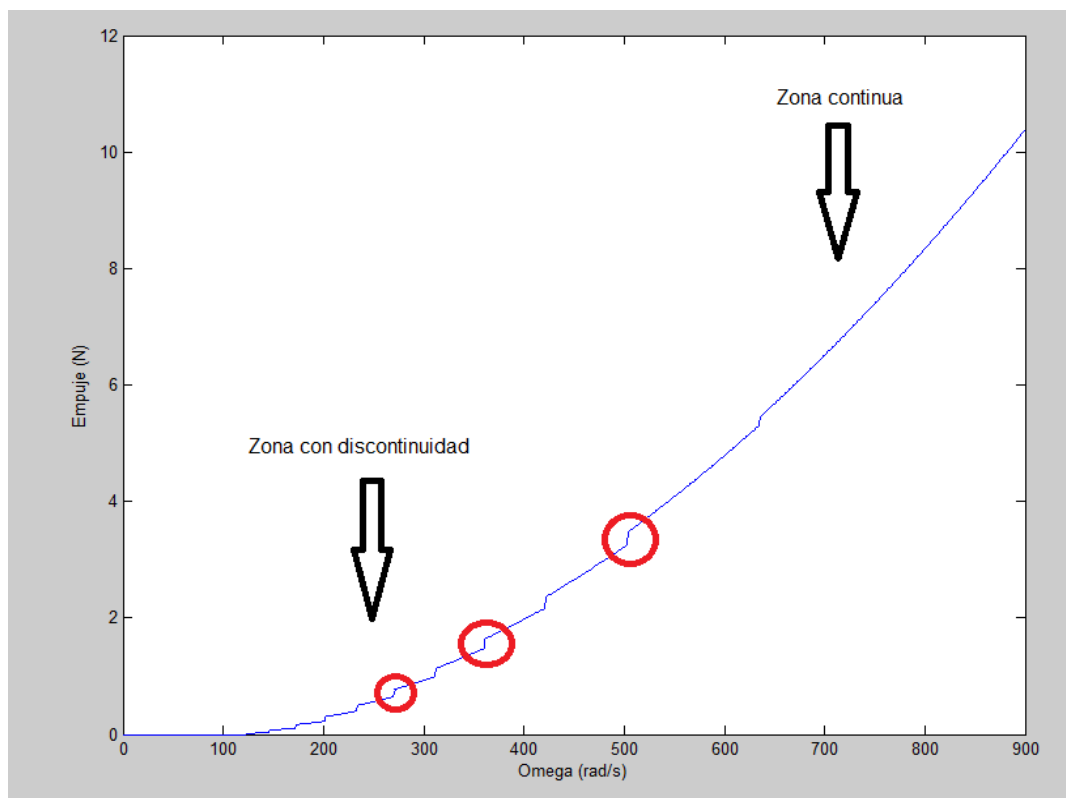
**Figura 5.8**

La limitación anterior no tiene efectos apreciables sobre el simulador de vuelo por las siguientes razones:

- El problema sólo concierne a ciertos regímenes del total de las *Cartas de navegación*.
- Los regímenes a los que afecta no son habituales durante la simulación. Generalmente el quadrotor no vuela en pérdidas, y si lo hace, es de manera muy puntual. Es evidente que el régimen estudiado ( $\Omega = 350$  rad/s,  $V_z = -4$  m/s) es poco probable.
- El problema de la discontinuidad de fuerzas y momentos afecta generalmente a unos pocos elementos diferenciales de área, por lo que la discontinuidad es prácticamente inapreciable a nivel global cuando se estudian diferentes regímenes de las *Cartas de navegación*. La Figura 5.9 representa el empuje de distintos regímenes de vuelo que tienen en común  $V_z = -4$  m/s y  $\alpha_v = 60^\circ$ . Se aprecia que a velocidades de giro bajas (zonas de pérdidas) aparecen ciertas discontinuidades. A

<sup>29</sup> La distribución de fuerza tangencial inducida presenta una discontinuidad similar, pero no se representa en este estudio.

altas velocidades de giro se tiene una zona perfectamente continua al tratarse de regímenes que no son de pérdidas. Las discontinuidades no afectan a la tendencia general de la curva, por lo que en la simulación son inapreciables.



**Figura 5.9**

## 5.4 Análisis de la estabilidad del sistema

El estudio de la estabilidad del sistema fue uno de los más importantes problemas que se plantearon a lo largo del presente proyecto. Inicialmente se desconocía que el quadrotor es un sistema inestable para el vuelo de avance por propia naturaleza. Hubo que realizar un estudio teórico, consultar en diferentes referencias y validar los resultados teóricos con los mostrados en las salidas gráficas de Simulink.

En el Capítulo 4 se dedujo a través del criterio de estabilidad de Routh que el quadrotor es inestable independientemente de si el centro de gravedad del mismo se sitúa por encima o por debajo del plano de los rotores.

Para llevar a cabo el análisis se presentan los resultados de diversas simulaciones que no se han ejecutado en tiempo real para facilitar el análisis gráfico. A continuación se estudia el quadrotor objeto de análisis<sup>30</sup> cuando este realiza un vuelo de las siguientes características:

<sup>30</sup> Los diferentes análisis se llevan a cabo sobre pequeñas modificaciones del quadrotor referido en el apartado 5.1.

| Tiempo (s) | 0 – 6           | 6 – 35                  | 35 – 35.5                   | 35.5 – 80               |
|------------|-----------------|-------------------------|-----------------------------|-------------------------|
| Rotor 1    | $\Omega_{\max}$ | $\Omega_{\text{hover}}$ | $\Omega_{\text{hover}} - 5$ | $\Omega_{\text{hover}}$ |
| Rotor 2    | $\Omega_{\max}$ | $\Omega_{\text{hover}}$ | $\Omega_{\text{hover}} - 5$ | $\Omega_{\text{hover}}$ |
| Rotor 3    | $\Omega_{\max}$ | $\Omega_{\text{hover}}$ | $\Omega_{\text{hover}} + 5$ | $\Omega_{\text{hover}}$ |
| Rotor 4    | $\Omega_{\max}$ | $\Omega_{\text{hover}}$ | $\Omega_{\text{hover}} + 5$ | $\Omega_{\text{hover}}$ |

Tabla 5.1

La Tabla 5.1 impone unas referencias, como si fuesen mandadas por el usuario a través del joystick, de vuelo de avance en el eje  $x_b$  entre los segundos 35 y 35.5 de la simulación.

La referencia [17] lleva a cabo un estudio de estabilidad en función de la situación del plano que forman los rotores. Los autores indican que si el centro de gravedad se encuentra por debajo del plano de los rotores el sistema diverge con oscilación. Por otro lado, si el centro de gravedad se sitúa encima del plano que forman los rotores el sistema diverge sin oscilación. En el caso de encontrarse sobre el mismo plano de los rotores, el sistema es críticamente estable.

Se ha comprobado el comportamiento anterior a través de Simulink, modelando dos quadrotors, uno con el centro de gravedad por encima del plano de los rotores, y otro por debajo.

El quadrotor modelado en 5.1 tiene el centro de gravedad por debajo de los rotores a una distancia de 3.9 cm. Efectivamente, se comprueba que el sistema diverge con oscilación.

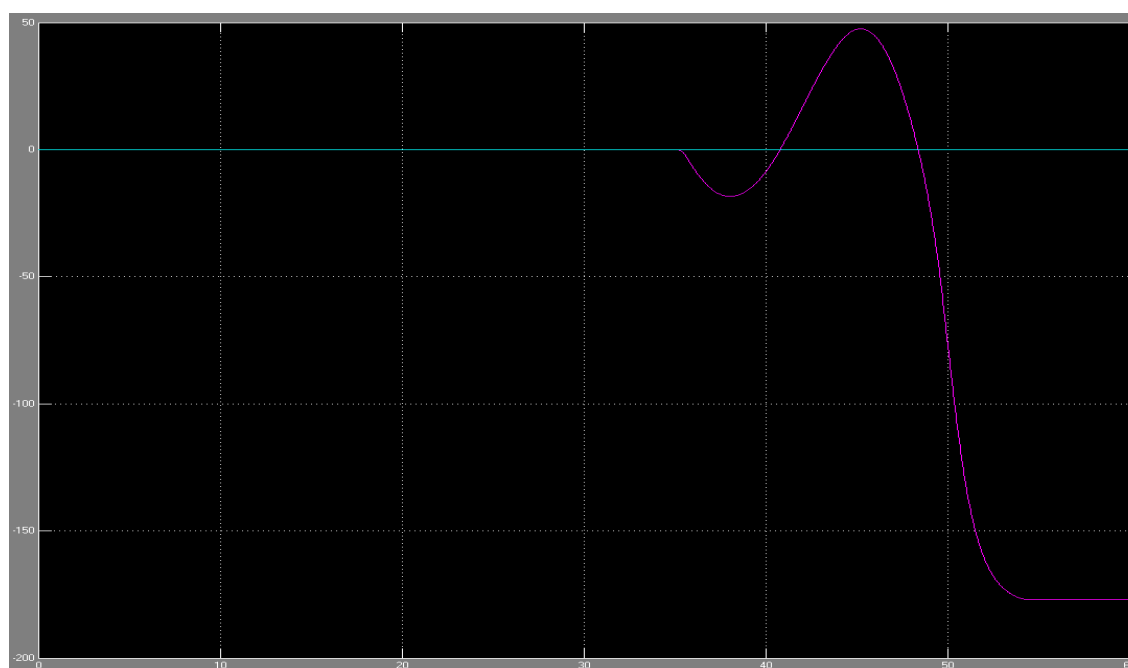


Figura 5.10

La Figura 5.10 muestra la evolución del ángulo girado respecto al eje  $y_b$  cuando no existe ninguna fuerza de rozamiento del quadrotor con el aire.

Si se implementa la fuerza de rozamiento, la oscilación diverge al principio y luego deja de hacerlo hasta que finalmente el helicóptero cae al suelo como consecuencia de las pronunciadas oscilaciones. Este efecto se representa en la Figura 5.11.

Si ahora se introduce el efecto del momento de la fuerza de rozamiento se observa en la Figura 5.12 que aunque el sistema también oscila, la amplitud de la oscilación se ha reducido más de 10°.

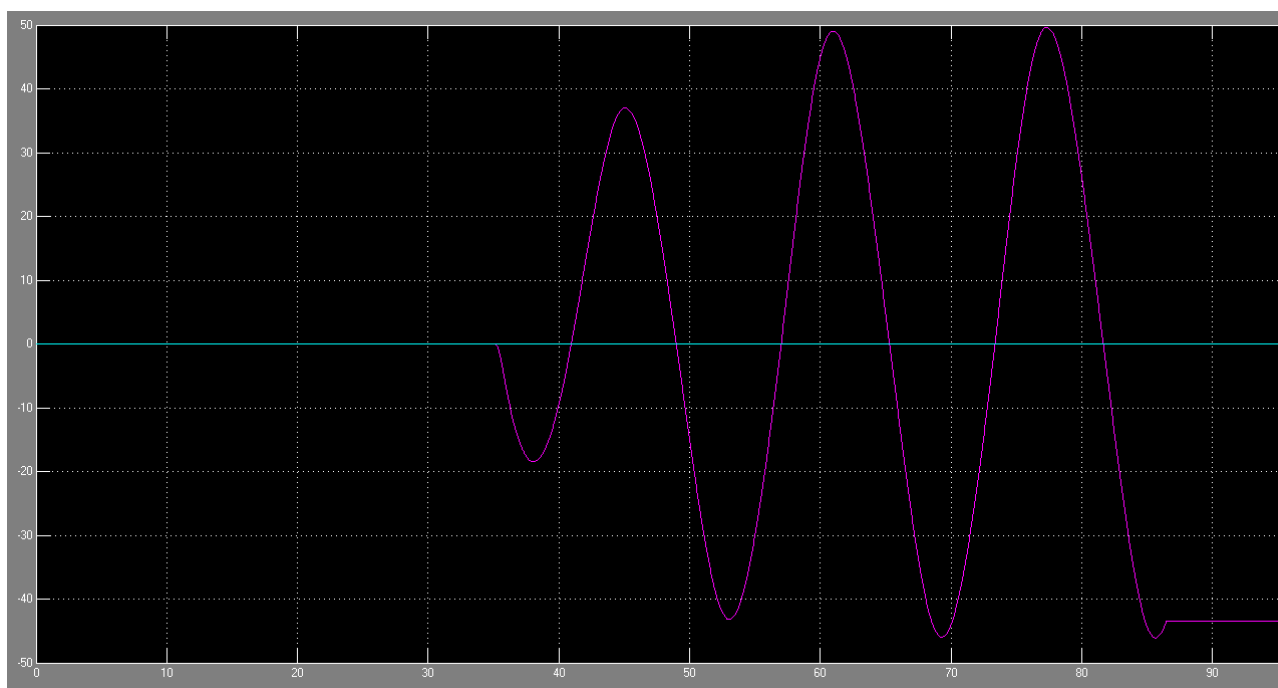


Figura 5.11

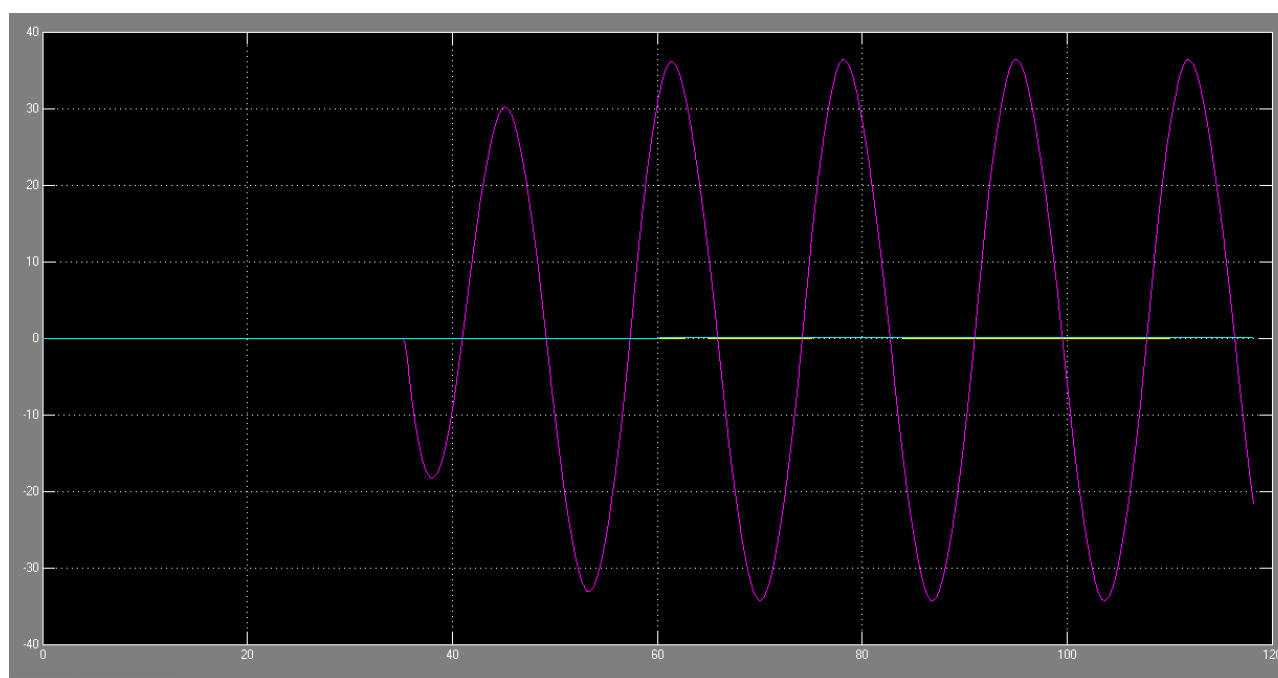


Figura 5.12

El sistema es críticamente estable en estos dos casos porque la distancia del centro de gravedad al plano de los rotores es pequeña.

Este análisis de estabilidad permite comprobar también la importancia que tiene la fuerza de rozamiento y el momento que crea sobre la estabilidad del sistema.

Ahora se modifica el quadrotor modelado en el apartado 5.1 para aumentar la distancia del centro de gravedad al plano de los rotores. Para ello, el ángulo de inclinación se toma  $\beta_{\text{cruz}} = 30^\circ$ . Entonces, la distancia es de 9.2 cm, más del doble de la distancia anterior.

La Figura 5.13 representa una simulación con la fuerza de rozamiento y el momento creado por el mismo implementados. Se observa que el sistema diverge con oscilación, como era de esperar, hasta el momento de la caída. Se deduce así que a medida que la distancia entre centro de gravedad y plano de los rotores aumenta la estabilidad se ve empeorada.

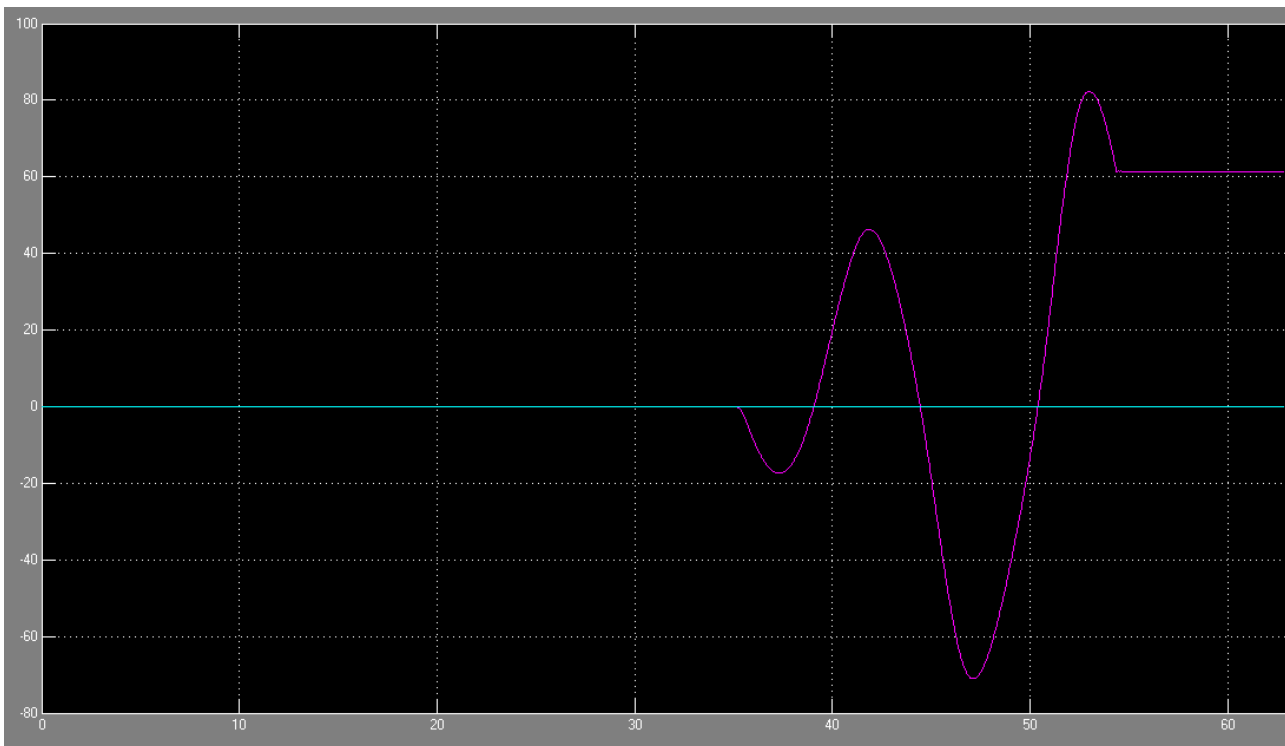
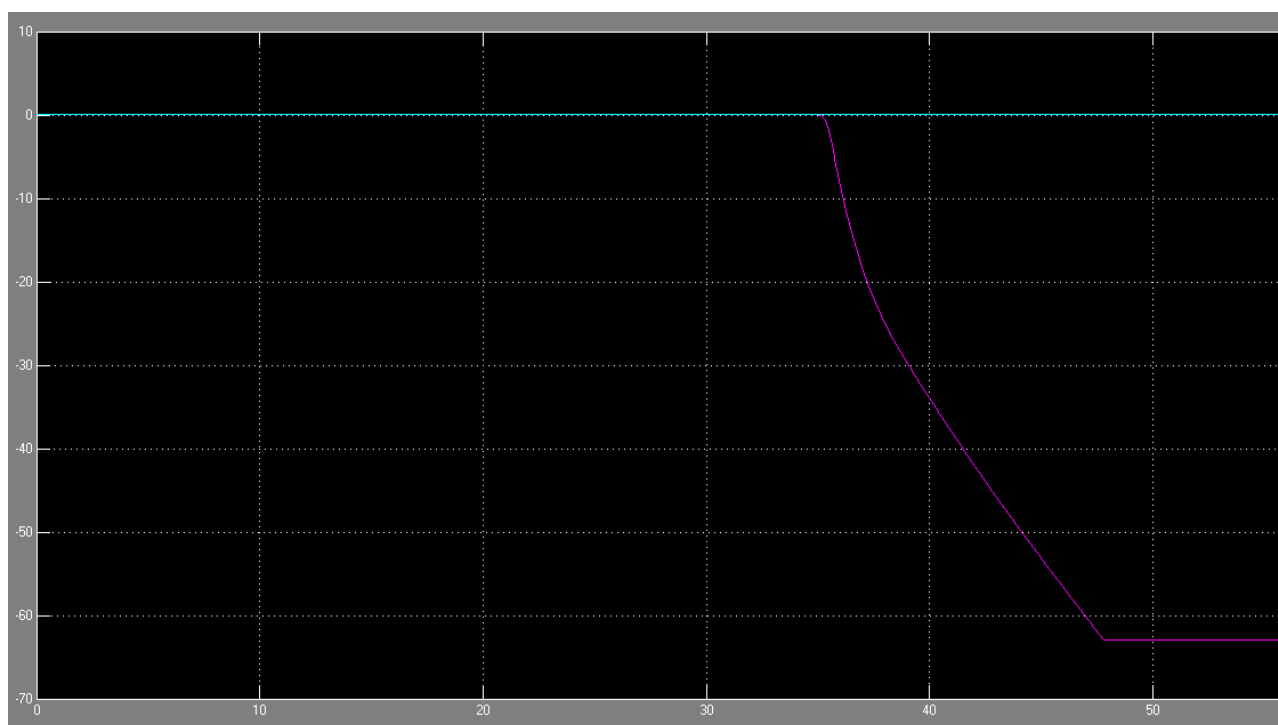


Figura 5.13

Se modela a continuación un quadrotor con el centro de gravedad por encima del plano de los rotores. Para ello, se modifica nuevamente el del apartado 5.1 diseñando un ángulo de inclinación de  $\beta_{\text{cruz}} = -30^\circ$ . Entonces, la distancia es de 1.3 cm. La modelización es ficticia, ya que un quadrotor diseñado de esta forma tendría los rotores en contacto con el suelo en el despegue, pero a efectos de simulación el análisis es válido.



**Figura 5.14**

La Figura 5.14 muestra que el sistema diverge sin oscilación, hasta el momento de la caída, tal y como era de esperar.

Para concluir con el análisis de estabilidad se presenta la salida del sistema cuando se implementa el control PID. La Figura 5.15 muestra que el sistema se estabiliza. Existe una pequeña oscilación de amplitud  $0.05^\circ$  aproximadamente que es despreciable al ojo humano. Esta se atribuye a la elevada sensibilidad del sistema a la dinámica de los motores, donde pequeñas variaciones de velocidad de giro entre rotores generan diferencias de empuje suficientes como para crear momento.

La salida con control es tan similar para cada uno de los tres quadrotors modelados que sólo se presenta una de ellas.

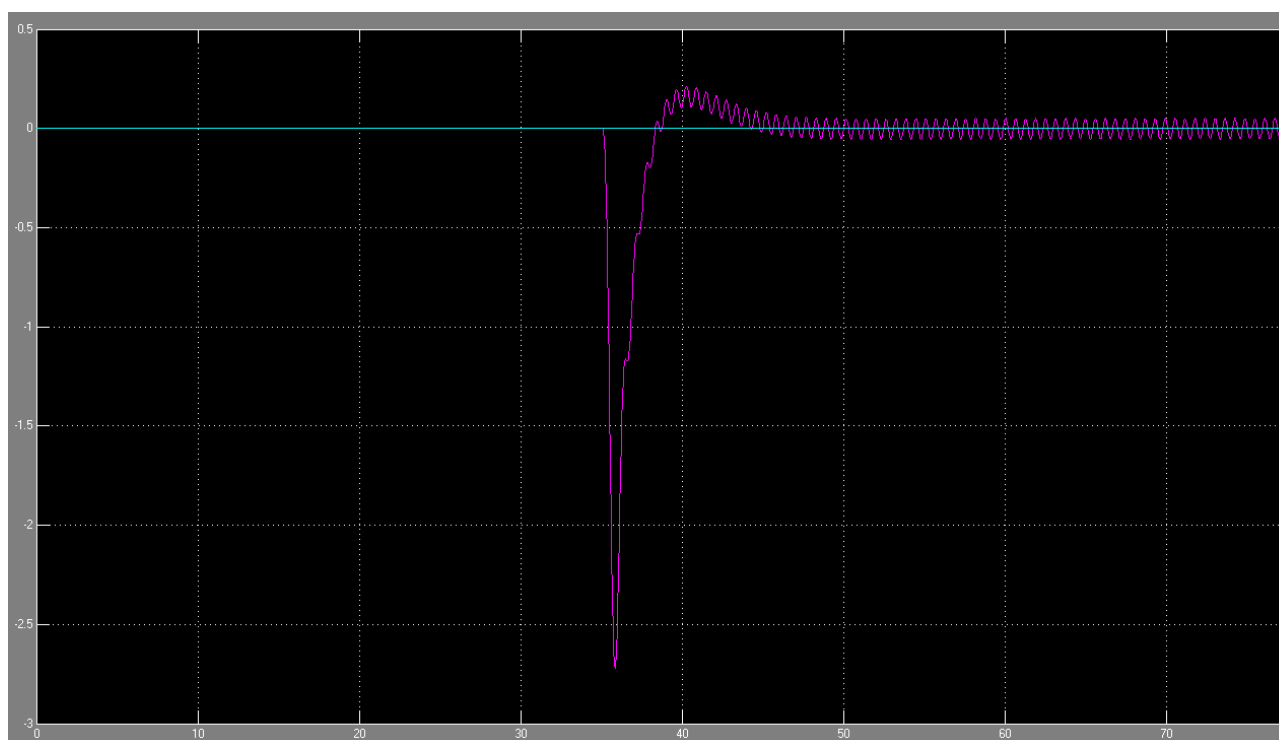


Figura 5.15

### 5.5 Análisis de la situación de contacto con el suelo

Tal y como se comentó en el Capítulo 4 es complicado modelar el contacto con el suelo debido a que la condición obvia  $z_e = 0$  no se puede implementar, sino que es necesario introducir las fuerzas<sup>31</sup> que *rescaten* al helicóptero de una caída sin remedio hacia cotas positivas, es decir, por debajo del suelo. Estas fuerzas eran la fuerza normal y la de impacto.

Se presenta a continuación una simulación donde se corta el suministro de energía a los motores en varias ocasiones para estudiar el efecto de caída y contacto con el suelo. La Figura 5.16 muestra tres zonas en las que el helicóptero toma valor de cota positiva tras la caída.

<sup>31</sup> Debe recordarse que el bloque utilizado de la toolbox *Aerospace Blockset* contiene como entradas las fuerzas y momentos actuantes sobre el quadrotor en la base asociada al mismo, y no es posible modelar la condición de contacto con el suelo a través de la altura.

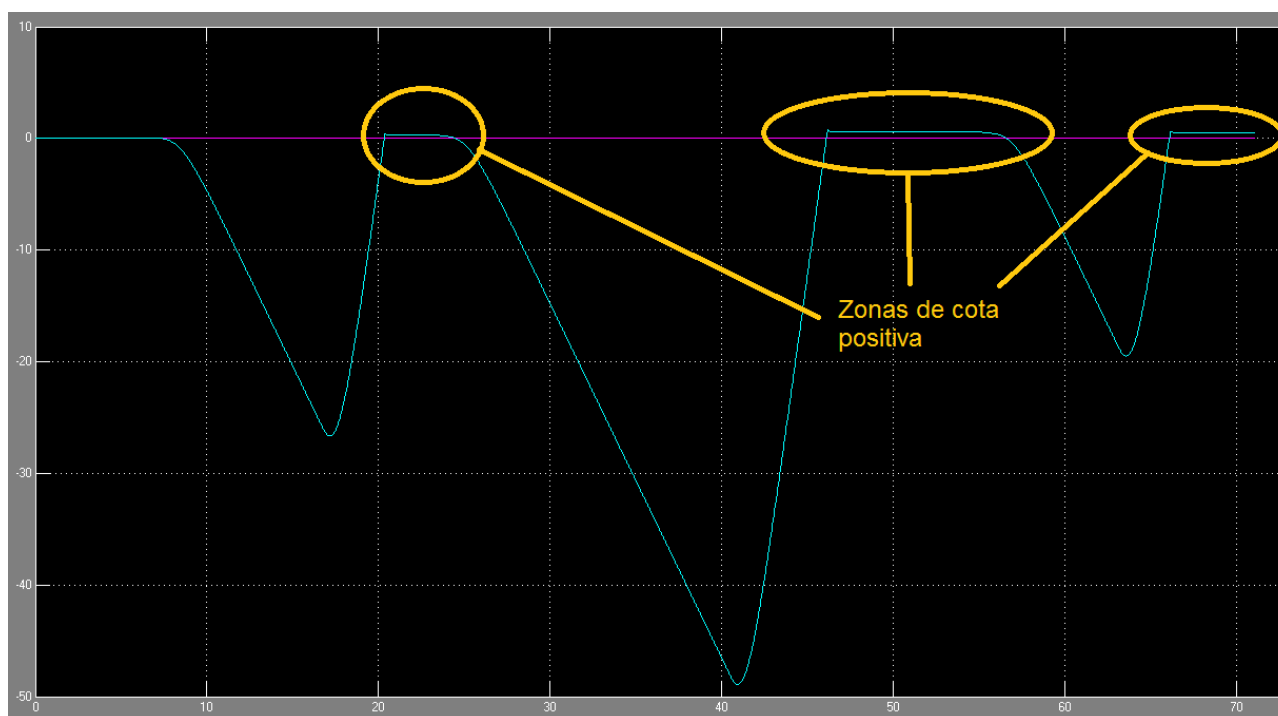


Figura 5.16

La Figura 5.17 estudia la primera de las caídas. Esta figura muestra un pico inicial, ya con cota positiva, donde el helicóptero recupera un valor de altura *menos positivo*. Este efecto de rebote se debe a la fuerza de impacto. Posteriormente, el quadrotor mantiene constante su cota positiva gracias a la fuerza normal. De esta forma se evita que el quadrotor tome valores de cota cada vez más positivos.

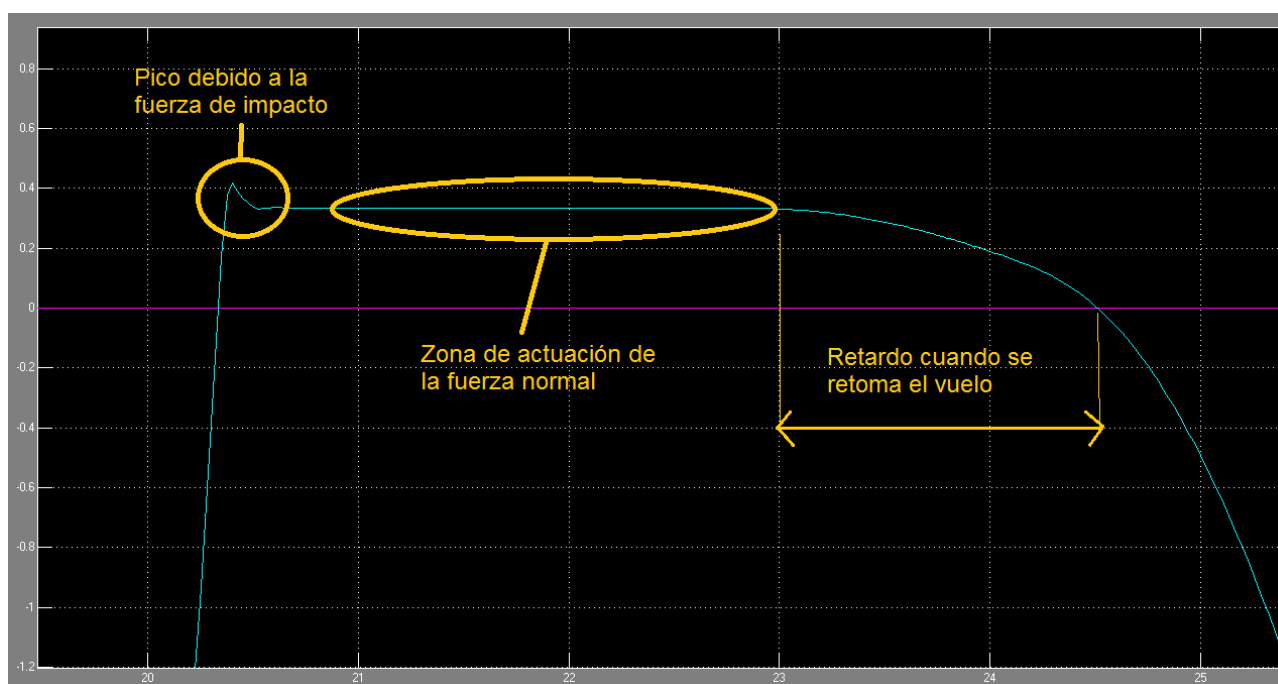


Figura 5.17

Como se ve, existe un offset, una desviación respecto a la realidad física ya que en lugar de mantener la cota constante a valor nulo durante el tiempo de actuación de la fuerza normal, la gráfica muestra que el sistema se encuentra a una altura, por debajo del suelo, de aproximadamente 0.3 m.

Esta desviación no se aprecia en el panel de control de LabVIEW ya que al desacoplar los cálculos de la representación gráfica se consigue tener la libertad de imponer la condición  $z_e \leq 0$  al menos para la citada representación. De esta forma, el usuario no se entera de que para el modelo dinámico el quadrotor no se encuentra a cota nula sino a cota positiva. No obstante, cuando el helicóptero retoma el vuelo hay un tiempo de retardo hasta recuperar altura nula que puede ser percibido por el usuario, aunque esto es bastante improbable.

La solución implementada para este problema es más que suficiente desde la perspectiva de la creación de un simulador de vuelo para el entrenamiento. Pero en el momento que se diseñe un quadrotor en la realidad y se desee comparar las posiciones dadas por los sensores acoplados al mismo con los valores aportados por la simulación del helicóptero modelado se observarán discrepancias debido al contacto con el suelo, generalmente en forma de retardos del simulador. No es el objeto de este proyecto aportar soluciones más precisas a este problema. Simplemente se plantea que sería necesario programar el modelo dinámico de diferente manera, por ejemplo sustituyendo el modelo de bloques de Simulink por código de programación donde la condición  $z_e \leq 0$  pueda ser fácilmente implementada.

## 5.6 Análisis de la medida de tiempos para la simulación en tiempo real

Para concluir con el presente capítulo se presenta un análisis sobre la medida de tiempos donde el objetivo es comprobar que el ordenador es capaz de llevar a cabo la simulación en tiempo real.

Para ello se realiza una simulación de 100 segundos de duración<sup>32</sup> con el modelo dinámico de Matlab completo, con un paso de simulación de 0.025 segundos y 40 fps para la representación de LabVIEW.

Bajo estas condiciones, si no se implementa el bloque *Simulation Pace* no se consigue sincronización entre el tiempo de la simulación y el tiempo de la vida real.

Entonces, 100 segundos de simulación se realizan en 22.99 segundos de la vida real. Por tanto, se concluye que da tiempo al ordenador para efectuar todas las operaciones y que se puede implementar la simulación en tiempo real.

Si se elimina la representación gráfica, 100 segundos de simulación se realizan en 12.80 segundos de la vida real.

Cuando se implementa el bloque *Simulation Pace*, 100 segundos de simulación se realizan en 100 segundos de la vida real, implementando de esta forma el concepto de tiempo real en el simulador de vuelo.

<sup>32</sup> Los 100 segundos se refieren a segundos de la simulación, no necesariamente del mundo real.

Se presenta a continuación unas tablas con el análisis anterior para todas las combinaciones de fps y paso de simulación que se han programado.

| 40 fps              | Tiempo (s)    |                           | Simulación en tiempo real |
|---------------------|---------------|---------------------------|---------------------------|
|                     | Sólo cálculos | Cálculos y representación |                           |
| $\Delta t = 0.0250$ | 12,8          | 22,99                     | Sí                        |
| $\Delta t = 0.0125$ | 25,11         | 46,97                     | Sí                        |

**Tabla 5.2**

| 25 fps              | Tiempo (s)    |                           | Simulación en tiempo real |
|---------------------|---------------|---------------------------|---------------------------|
|                     | Sólo cálculos | Cálculos y representación |                           |
| $\Delta t = 0.0400$ | 7,91          | 11,2                      | Sí                        |
| $\Delta t = 0.0200$ | 15,98         | 22,27                     | Sí                        |
| $\Delta t = 0.0100$ | 30,95         | 45,51                     | Sí                        |

**Tabla 5.3**

| 20 fps              | Tiempo (s)    |                           | Simulación en tiempo real |
|---------------------|---------------|---------------------------|---------------------------|
|                     | Sólo cálculos | Cálculos y representación |                           |
| $\Delta t = 0.0500$ | 9,34          | 12,16                     | Sí                        |
| $\Delta t = 0.0250$ | 12,63         | 24,62                     | Sí                        |
| $\Delta t = 0.0125$ | 26,61         | 48,97                     | Sí                        |

**Tabla 5.4**

| 10 fps              | Tiempo (s)    |                           | Simulación en tiempo real |
|---------------------|---------------|---------------------------|---------------------------|
|                     | Sólo cálculos | Cálculos y representación |                           |
| $\Delta t = 0.1000$ | 3,68          | 6,76                      | Sí                        |
| $\Delta t = 0.0500$ | 7,34          | 12,43                     | Sí                        |
| $\Delta t = 0.0250$ | 13,76         | 24,4                      | Sí                        |
| $\Delta t = 0.0125$ | 26,49         | 47,52                     | Sí                        |

**Tabla 5.5**

Las mediciones anteriores se han obtenido a partir de un cronómetro externo al ordenador, de manera que se introduce un error en dicha medición que sin embargo no impide extraer las siguientes conclusiones:

- Algo más de la mitad del tiempo de simulación  $t_{sim}$  se emplea en los cálculos del modelo dinámico  $t_2$  y el resto en la representación gráfica  $t_4$ .
- Más importante es el hecho de que a medida que se exige una actualización de la imagen más frecuente (mayor fps) el tiempo de simulación  $t_{sim}$  no varía porque no aumenta  $t_4$ . Este efecto tan beneficioso es consecuencia del desacoplamiento entre el proceso de cálculo y el de representación. El modelo de Matlab/Simulink no se ve penalizado con retrasos por el hecho de demandar una actualización de la imagen más frecuente.

## 6. CONCLUSIONES

El presente proyecto final de carrera ha supuesto un reto importante por la dimensión del mismo y la gran cantidad de aspectos ingenieriles que intervienen. Aerodinámica, mecánica de sólido rígido, motores y baterías, control y estabilidad, programación, lectura de datos a través de un joystick, simulación e integración de Matlab y LabVIEW en tiempo real han supuesto el desarrollo de un proyecto claramente multidisciplinar.

El estudio y la recopilación previa de datos y referencias ha resultado fundamental para alcanzar los objetivos finales. La originalidad de algunas de las soluciones tomadas ha supuesto expresar la creatividad y el ingenio.

A continuación se presentan algunos aspectos que merecen un comentario especial, bien sea por las limitaciones que presentan o por la importancia que tienen dentro del proyecto.

El estudio de la aerodinámica del rotor es un completo análisis de la teoría de la cantidad de movimiento y el elemento de pala. Algunas de las hipótesis simplificadoras pueden suponer los puntos de partida de futuros trabajos. Se puede plantear el estudio de las palas no como sistema rígido. También puede resultar interesante analizar los regímenes laminar o turbulento sobre el perfil de pala en función del número de Reynolds. Otro estudio puede llevar a analizar la influencia de la altura en la densidad del aire o en la gravedad de manera que el modelo dinámico se vea afectado por esta variación.

Hay que tener en cuenta que tomar para el estudio una variable aerodinámica adicional, como pueda ser la altura o el número de Reynolds, supone el incremento de las dimensiones de las matrices llamadas *Cartas de navegación*. De esta forma, se pasaría a tener matrices de orden 4, como mínimo, y los cálculos aumentarían considerablemente. La simulación en tiempo real no se vería afectada porque el único cálculo que se hace en cada paso de simulación (desde el punto de vista de las *Cartas de navegación*) es la interpolación para obtener el valor de salida de la matriz a partir de los valores de entrada. No obstante, el tiempo necesario para cargar estas matrices aumentaría mucho. Podrían necesitarse días para que Matlab desarrollase los cálculos de todos los elementos de las matrices.

En esos casos el simulador de vuelo cambiaría su filosofía. El software de modelización aerodinámica pasaría a ser una parte invisible para el usuario. Este podría cargar varios modelos de rotor, tantos como los que estuviesen almacenados. Una forma alternativa para que el usuario no pierda autonomía en la modelización del rotor debido al incremento del tiempo de cálculo es sustituir Matlab por C# para desarrollar el software. De esta forma, la velocidad de cálculo es mucho mayor.

La modelización del rotor también puede ampliarse para extender el software a rotores coaxiales, que son habituales en el quadrotor y en otros tipos de helicópteros. La implementación de un modelo de rotor con más grados de libertad es otra rama de posible ampliación. En ese caso, los movimientos de arrastre y batimiento de las palas estarían permitidos.

Por otro lado, en lo relativo a la modelización del quadrotor sí que existen mejoras que pueden ser introducidas fácilmente sin suponer incrementos del coste computacional. Es aquí donde el proyecto puede adquirir complejidad sin que ello repercuta al resto de partes. Especialmente interesante sería la posibilidad de configurar el posicionamiento y la morfología de las partes del quadrotor. Por ejemplo, la estructura podría estar formada por una esfera en lugar de la caja central. La caja de componentes electrónicos podría estar situada en otra zona, etc... También resultaría de utilidad desarrollar un pequeño software para que el usuario pueda introducir nuevos motores y baterías comerciales en la base de datos. Esto permitiría que el programa no fuese quedando obsoleto, mejorando la autonomía de vuelo al aumentar las prestaciones de las baterías.

Otra modificación de especial relevancia sería la ampliación de la modelización a otro tipo de helicópteros distintos al quadrotor, o modificaciones de este. La inclusión de rotores coaxiales como se ha dicho, formando helicópteros de 6 y 8 rotores es una ampliación fácilmente implementable dada la estructura del programa. Ahora bien, estos cambios llevarían aparejados ciertas alteraciones del modelo dinámico en lo referente a las fuerzas y momentos aerodinámicos.

El modelo dinámico presenta también algunos puntos de desarrollo futuro interesantes. Las modificaciones que se hagan aquí deben tener muy presente que la simulación debe realizarse en tiempo real. La implementación de diferentes tipos de control como PID, LQ o borroso representa todo un área de estudio. Otro aspecto a desarrollar es la inclusión de un modelo de viento aleatorio que afecte al comportamiento del quadrotor. El simulador creado no permite observar cómo se comporta el helicóptero ante rachas de viento. El análisis de este comportamiento permitiría abordar el problema del control de una manera mucho más real.

En lo relativo a la salida gráfica y la creación del panel de control, la solución de integrar Matlab y LabVIEW es eficaz y rápida. No obstante, la selección de otro tipo de programas específicos de simulación de helicópteros, como Flighgear, es también otra rama de trabajo futuro.

El simulador podría adquirir mayor complejidad y realismo con el desarrollo de diferentes mundos o entornos gráficos, la introducción de sonido, o en un estadio mayor, el desarrollo del simulador en 3D.

Un cambio de filosofía sería el desarrollo de un simulador de vuelo capaz de adquirir las lecturas de los sensores asociados a un helicóptero real. La verificación de que el comportamiento real y el simulado son similares, y la acotación del error entre ambos es otro posible trabajo a desarrollar.

En la misma línea puede encuadrarse la ampliación del software de simulación para aplicaciones específicas como puede ser el control de incendios, la verificación de palas de aerogenerador, especialmente *offshore*, la gestión del tráfico, etc... El software podría contar con elementos específicos que permitiesen gestionar estas tareas. Aunque, como es lógico, esto supondría un estudio previo de cuáles son las características que definen estos elementos.

De todas las modificaciones expuestas, aquellas que resultan más interesantes son la inclusión de viento en el modelo dinámico, el desarrollo de diversos algoritmos de control

y la sustitución del código de Matlab por C#. No se debe olvidar que el objetivo final es desarrollar un software de entrenamiento en tiempo real para quadrotors. Por tanto, las modificaciones deben mejorar y facilitar el alcance de este objetivo, dando realismo y aumentando las opciones del usuario. Pero a la vez, el software debe ser fácil de usar, ya que no resulta interesante complicarlo hasta el punto de que tan sólo personal muy especializado pueda emplearlo.

Puede concluirse que se ha alcanzado el objetivo final del proyecto con éxito a medida que se han conseguido las diferentes metas que se plantearon al comienzo. Este trabajo es el punto de partida de otros desarrollos. Por ello, empezar desde cero supone siempre un ejercicio de abstracción sobre lo que se tiene entre manos y sobre lo que puede llegar a ser. Como no se contaba con un sólido conocimiento previo sobre la materia de los vehículos aéreos este ejercicio de abstracción sobre lo que es un quadrotor y un software de simulación se convierte en un proceso de descubrimiento constante. Sentar las bases de un programa de carácter general, con un código que pueda ser entendido por otros programadores, y que recoja la realidad física del helicóptero se convierten en señas de identidad del trabajo diario.

Por último, cabe decir que la satisfacción por el resultado final y los conocimientos y experiencia adquiridos es total. Una vez concluido este proyecto final de carrera, precisamente se descubre que el proyecto en sí tiene mucho más recorrido. Las modificaciones expuestas, junto con otras todavía por descubrir, son un aliciente personal y una motivación que se han fraguado durante meses de trabajo.



## 7. MANUAL DE USUARIO

En este capítulo se presenta una explicación del software. El objetivo es introducir al usuario en el manejo del programa. Muchas de sus características ya han sido descritas a lo largo de los capítulos anteriores, por lo que ahora se muestra en este pequeño manual cómo se introducen los datos, y en definitiva cómo es el diseño de las pantallas y los menús.

Para iniciar la ejecución del programa es necesario tener instalada la versión de Matlab R2010a u otra superior<sup>33</sup>. Una vez abierto Matlab, debe cambiarse el directorio de trabajo que aparece por defecto por la carpeta \Quad Simulator que contiene los archivos del programa. Posteriormente, debe ejecutarse en la ventana de comandos la siguiente instrucción:

```
quad_simulator
```

Se inicia entonces el programa, abriéndose el siguiente menú:

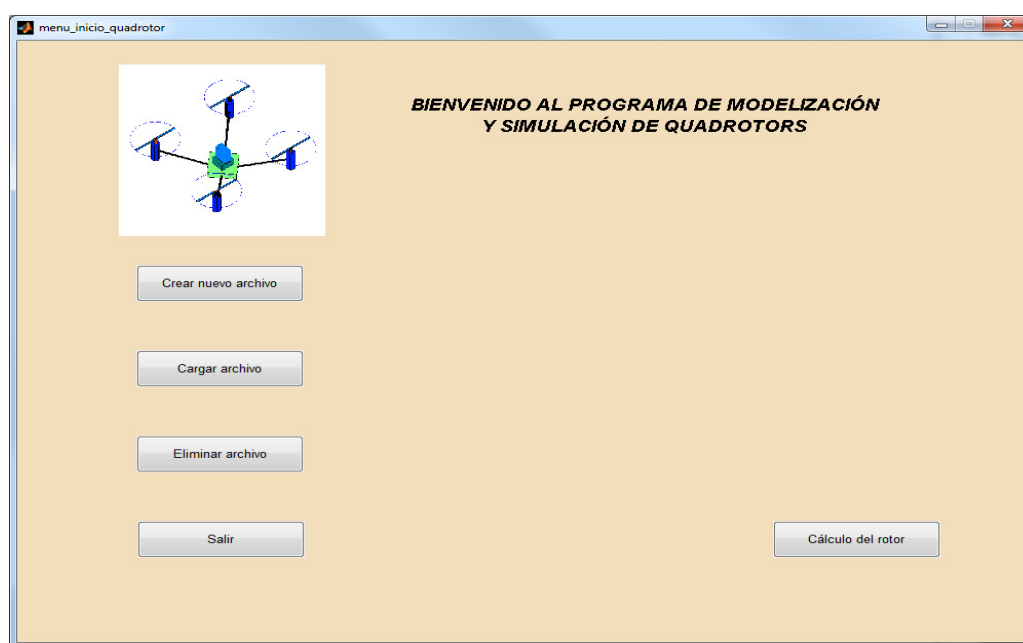


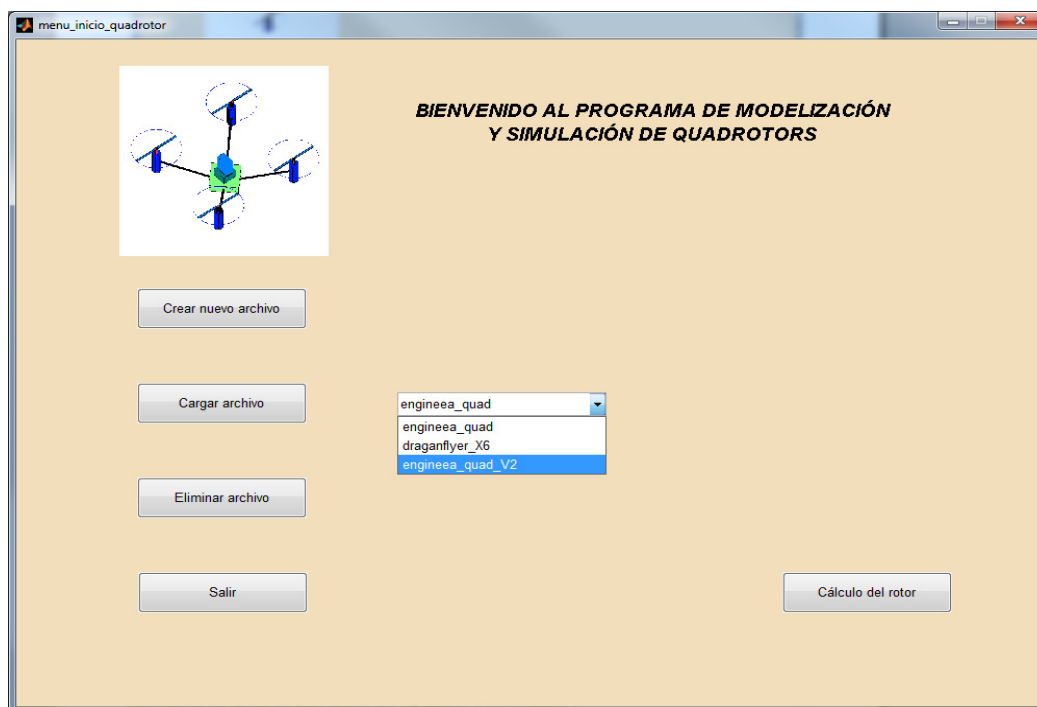
Figura 7.1

La ventana anterior consta de cinco botones. El botón *Cálculo del rotor* permite acceder a la parte del software destinada a la modelización del rotor. El botón *Crear nuevo archivo* permite acceder a la parte del software destinada a la modelización del quadrotor<sup>34</sup>. Los botones *Cargar archivo* y *Eliminar archivo* permiten la gestión de ficheros. Al pulsar uno de estos dos botones aparece un desplegable donde se recoge el nombre de los archivos previamente almacenados para ser cargados o eliminados.

<sup>33</sup> Versiones anteriores de Matlab pueden ejecutar los menús de modelización, e incluso la simulación en tiempo real, pero no el envío de datos a LabVIEW en tiempo real.

<sup>34</sup> Para llevar a cabo la completa modelización del quadrotor es necesario que previamente se haya realizado al menos una modelización del rotor.

La Figura 7.2 muestra el nombre de tres archivos almacenados que pueden ser cargados.



**Figura 7.2**

La gestión de archivos permite no tener que modelizar un quadrotor totalmente nuevo cada vez que se pretenda llevar a cabo la simulación. Basta con cargar un modelo que haya sido almacenado con anterioridad.

En primer lugar, se explicará la opción *Cálculo del rotor* del menú principal que lleva al estudio aerodinámico.

Aparece entonces un menú con opciones similares a las vistas anteriormente pero específicas para la modelización del rotor, tal y como muestra la Figura 7.3. Se permite entonces la creación de un nuevo modelo de rotor, así como la carga o la eliminación de archivos previamente guardados. Es decir, el software permite, por una parte, almacenar modelos de rotores, y por otra parte de manera independiente, almacenar modelos de quadrotors.

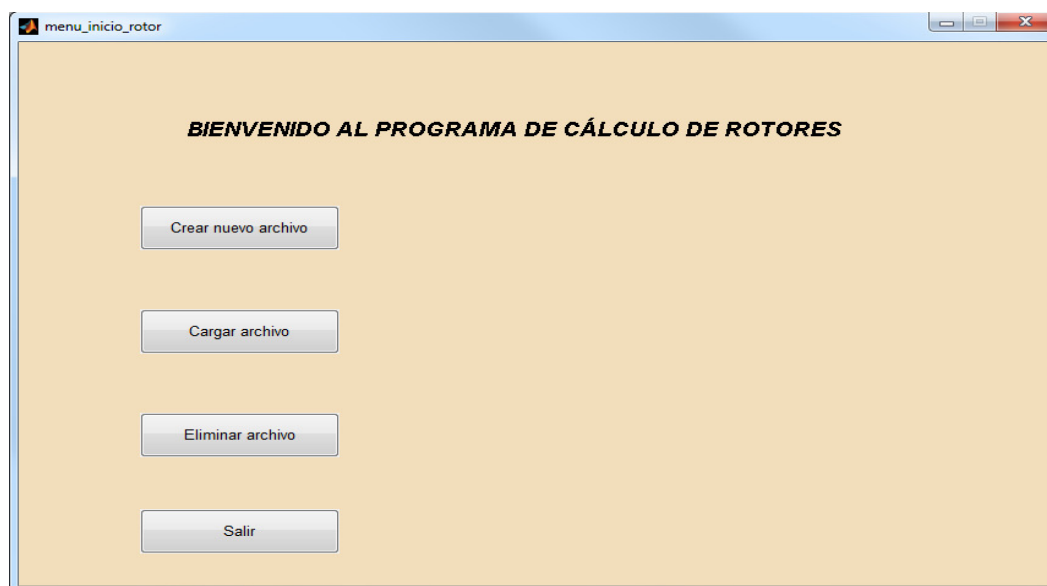


Figura 7.3

Se explica a continuación los pasos a seguir para la creación de un nuevo modelo de rotor cuando en el menú anterior se pulsa el botón *Crear nuevo archivo*. El menú que aparece es el mostrado en la Figura 7.4.

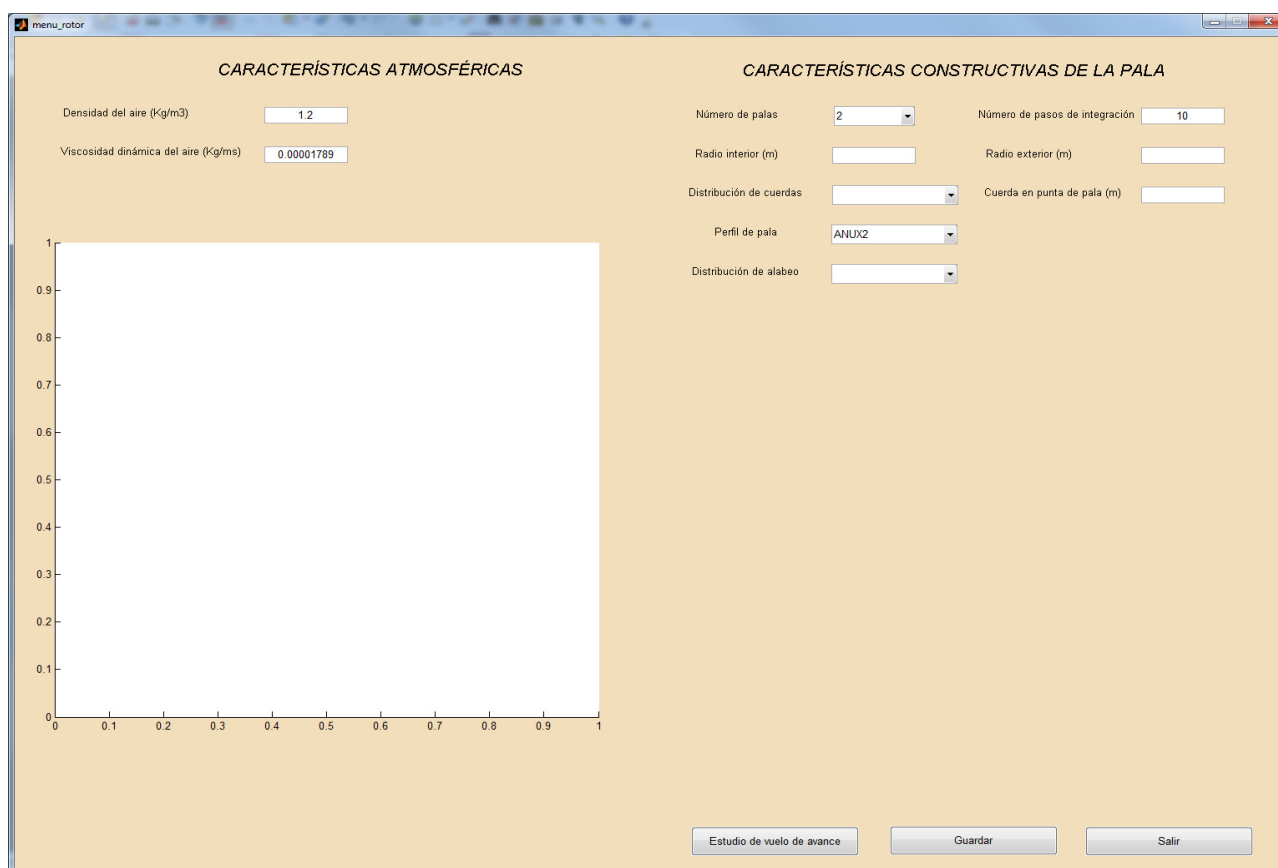


Figura 7.4

En el aparecen por defecto seleccionados los valores de las características atmosféricas (densidad y viscosidad dinámica del aire) así como el número de palas (2), el número de pasos de integración (10) y el tipo de perfil de pala (ANUX2). El usuario debe introducir además los valores del radio interior, el radio exterior, el tipo de distribución de cuerda (así como el valor de la cuerda en punta de pala<sup>35</sup>) y la distribución de alabeo.

La Figura 7.5 muestra el menú de modelización del rotor una vez introducidos los datos anteriores. El software se convierte entonces en una herramienta de estudio aerodinámico de mucho interés. Cuando se pincha sobre el botón de *Especificar régimen de funcionamiento* el usuario puede estudiar cuáles son los valores de empuje, arrastre<sup>36</sup>, par, etc... para el régimen especificado. Debe quedar claro que este análisis es exclusivo para el vuelo axial, y por tanto, tiene carácter básicamente informativo.

Así, la persona que modeliza el rotor puede obtener información, aunque parcial, del comportamiento dinámico del rotor antes de cargar las *Cartas de navegación* definitivas.

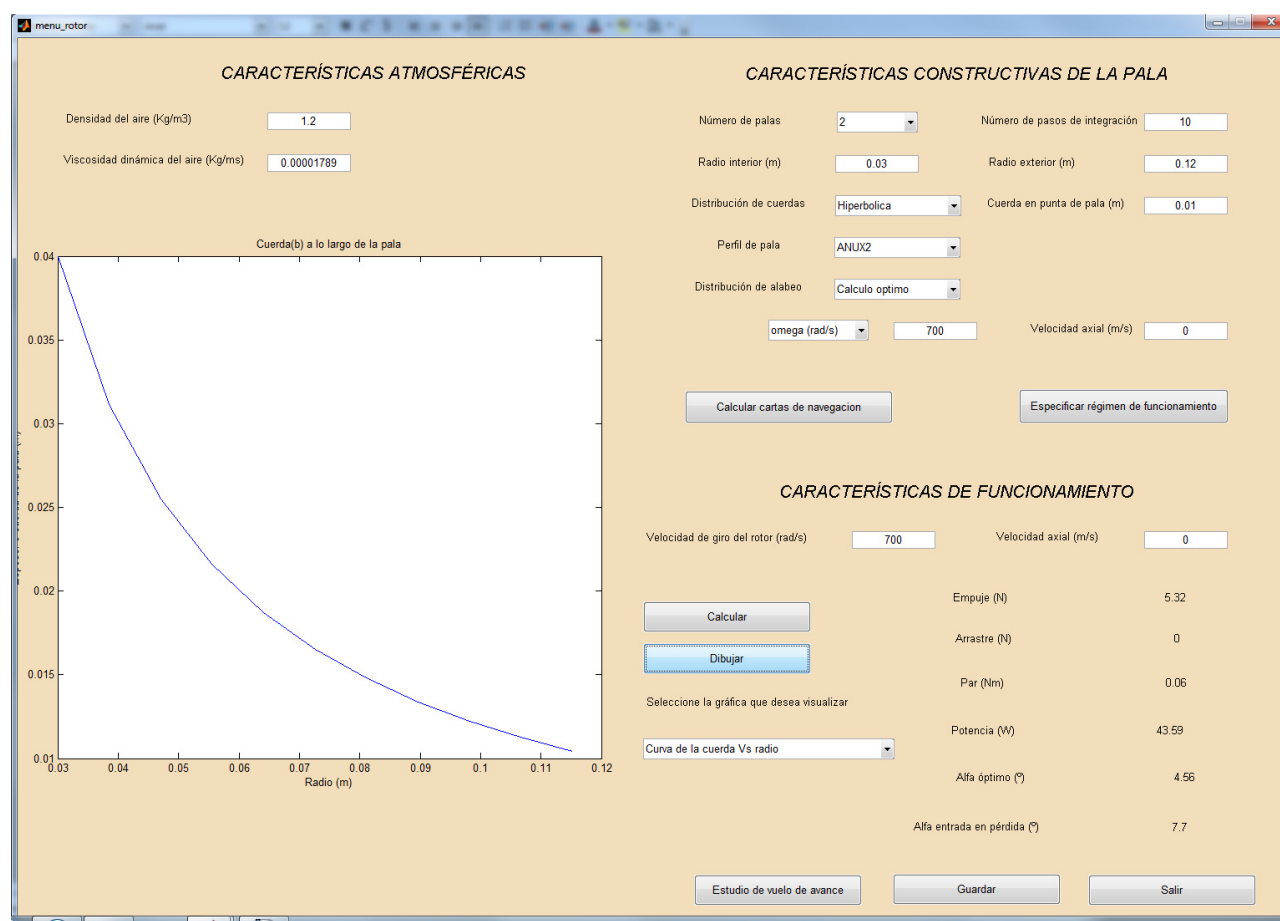


Figura 7.5

El software permite la representación gráfica de las siguientes curvas:

- Curva  $c_l$  vs  $\alpha$  (Figura 7.6).

<sup>35</sup> También se debe introducir el valor de la cuerda en el encastrado de pala si la distribución de cuerda es lineal.

<sup>36</sup> Por tratarse de cálculos para vuelo axial, la fuerza de arrastre es nula para cualquier combinación de velocidad de giro y velocidad axial.

- Curva  $c_d$  vs  $c_l$  (Figura 7.7).
- Curva  $\theta$  vs  $r$  (Figura 7.8).
- Curva  $\alpha$  vs  $r$  (Figura 7.9).
- Curva  $c$  vs  $r$  (Figura 7.10).
- Curva  $v_i$  vs  $r$  (Figura 7.11).

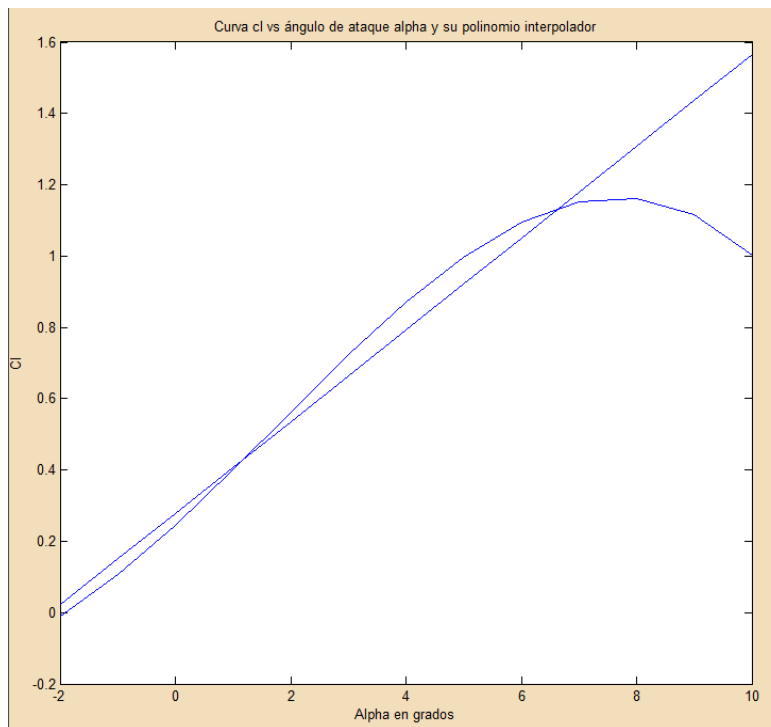


Figura 7.6

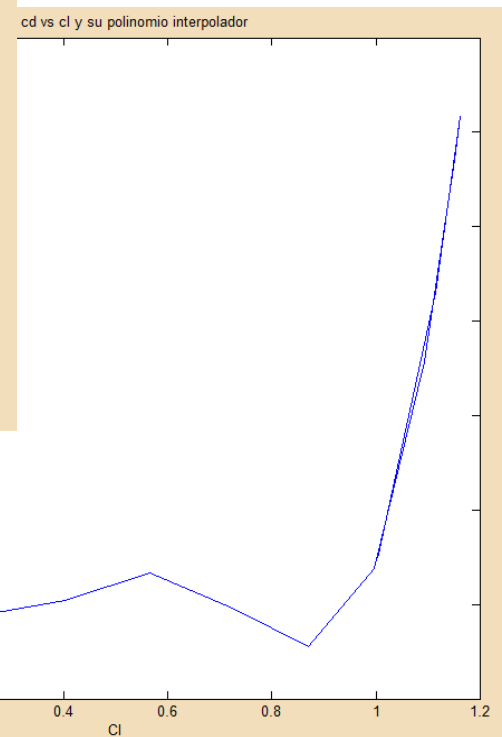


Figura 7.7

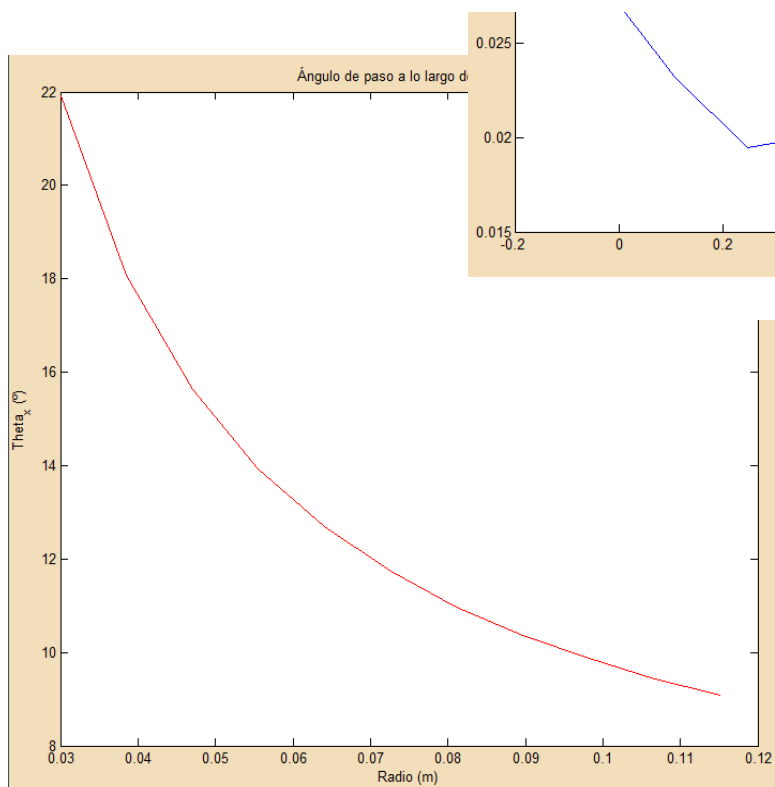


Figura 7.8

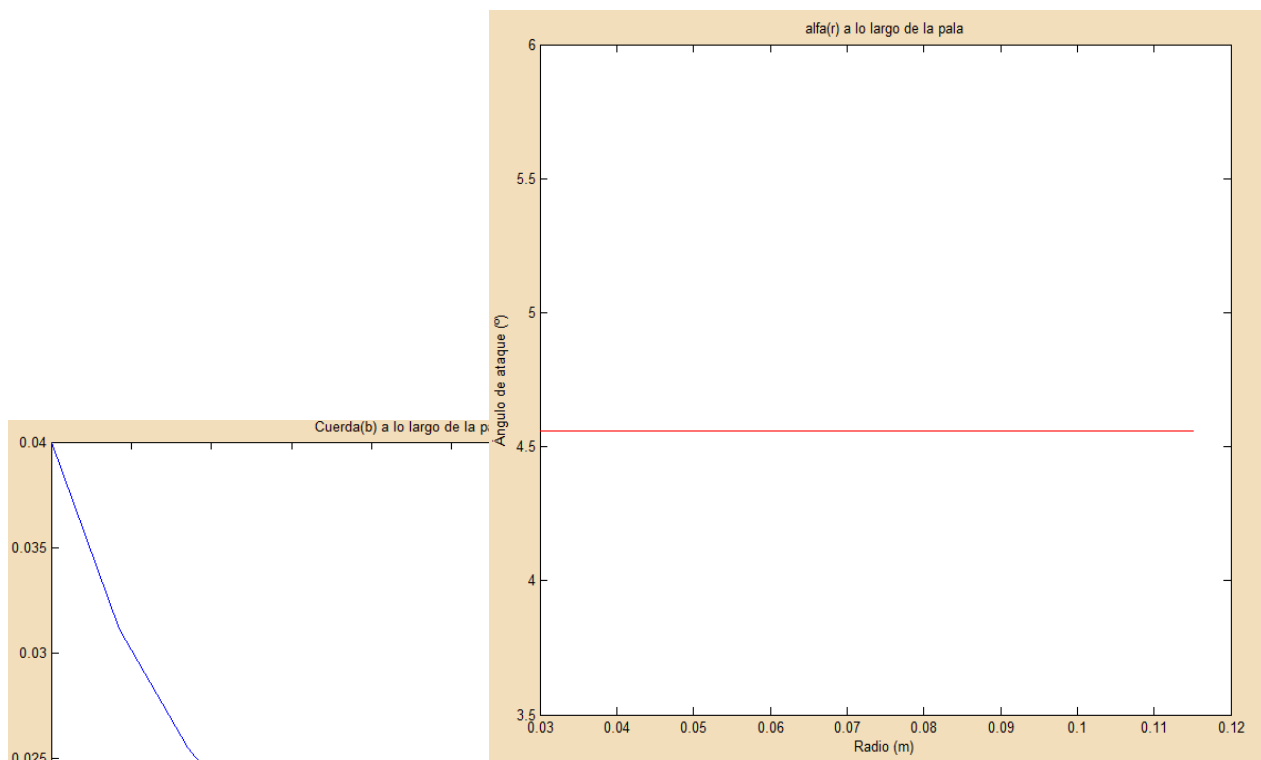


Figura 7.9

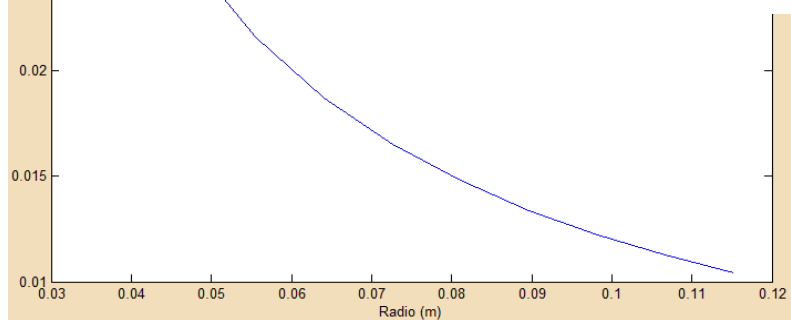


Figura 7.10

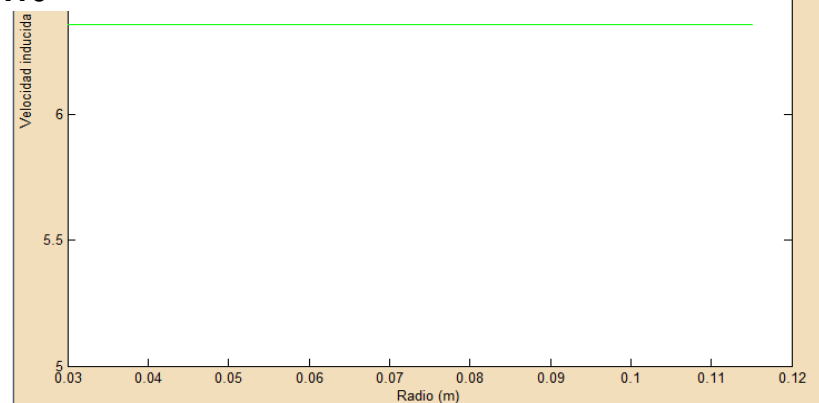


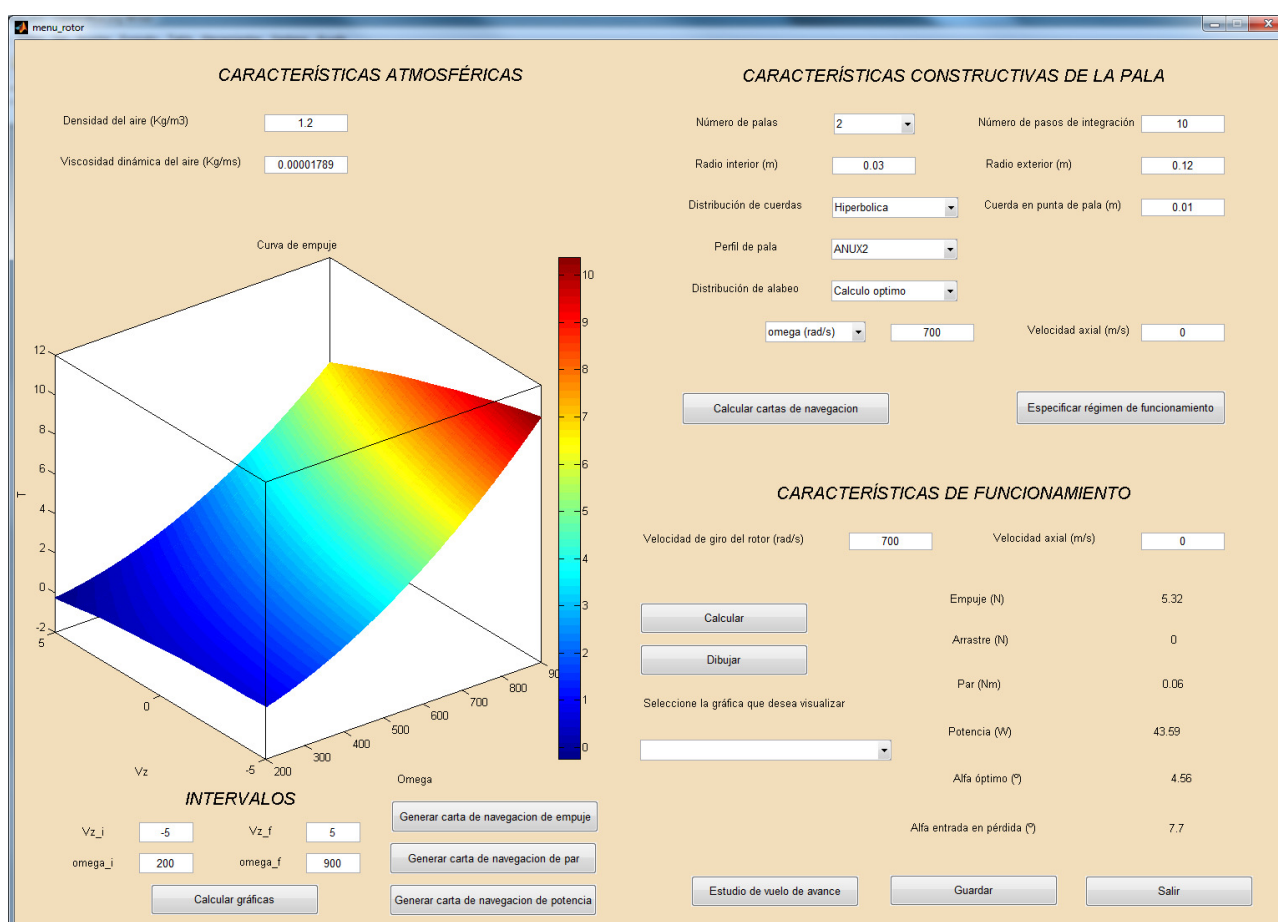
Figura 7.11

Las gráficas anteriores se han obtenido para un ejemplo concreto de rotor. Volviendo a la Figura 7.5, también es posible validar el modelo de rotor estudiando las *Cartas de navegación*, que se representan gráficamente para un intervalo de velocidad de giro y

velocidad axial introducido por el usuario.

Es importante señalar aquí que estas *Cartas de navegación* no son las que se almacenan para ser empleadas en el modelo dinámico sino que únicamente tienen carácter informativo y permiten también al usuario validar el modelo de rotor o modificar este si los datos gráficos y numéricos no se ajustan a lo deseado.

La Figura 7.12 muestra una perspectiva general del menú de modelización del rotor, mostrando la relación entre velocidad de giro, velocidad de vuelo axial y empuje. El empuje es mayor a medida que la velocidad de giro aumenta. Sin embargo, cuanto mayor es la velocidad de vuelo axial, el empuje es menor.



**Figura 7.12**

La Figura 7.13 y la 7.14 muestran la relación de la velocidad de giro y la velocidad de vuelo axial con el par y la potencia respectivamente. Se puede observar que la dependencia con la velocidad de vuelo axial es muy pequeña.

Si a continuación el usuario pulsa el botón *Salir* se pierde toda la información. Si se pulsa *Guardar* se accede al siguiente cuadro de diálogo mostrado en la Figura 7.15. En el se pide al usuario que introduzca el nombre del archivo con el que desea guardar la información. Este nombre aparecerá en el menú mostrado en la Figura 7.3 (junto con otros ficheros almacenados) cuando se pincha sobre el botón *Cargar archivo* (también si se pincha en *Eliminar archivo*).

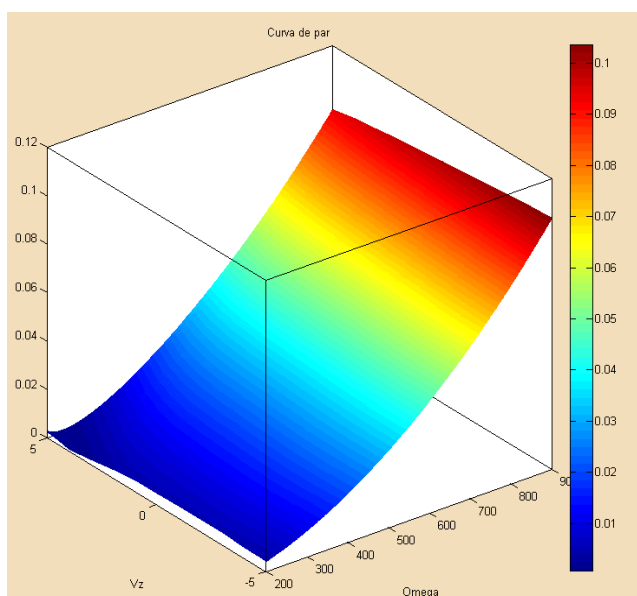


Figura 7.13

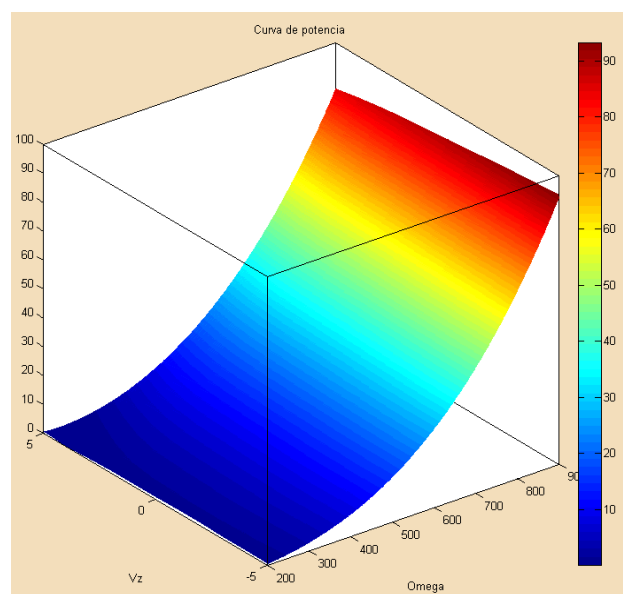


Figura 7.14

Al guardar un archivo se puede permanecer en el programa una vez almacenada la información (opción *Guardar* del menú de la Figura 7.15) o salir del programa (opción *Guardar y salir*).

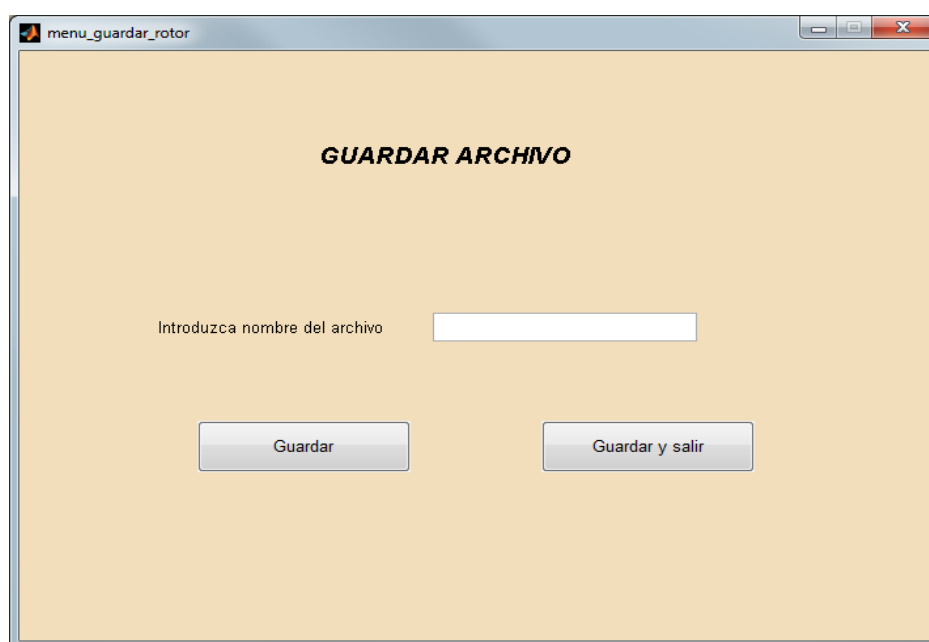


Figura 7.15

Volviendo nuevamente a la Figura 7.12, cuando el usuario considera válido el modelo del rotor debe pulsar *Estudio de vuelo de avance*. De esta forma se accede a un menú en el que se introduce el intervalo de cálculo de las *Cartas de navegación*.

La Figura 7.16 muestra este menú. Una vez introducido el intervalo se debe presionar sobre la opción *Calcular* para que Matlab ejecute las operaciones que permiten obtener las matrices de tres entradas.



The screenshot shows a software window titled 'menu\_intervalo\_cartas'. Inside, the title 'INTERVALO DE ESTUDIO DE VUELO DE AVANCE' is centered. Below it, there are three rows of input fields organized under two column headers: 'Valor inicial' and 'Valor final'. The first row is for 'Velocidad absoluta del rotor (m/s)' with values -5 and 5. The second row is for 'Velocidad de giro del rotor (rad/s)' with values 1 and 900. The third row is for 'Ángulo formado por el rotor y la velocidad (°)' with values 90 and 0. At the bottom, there are three buttons: 'Continuar sin calcular', 'Calcular', and 'Salir'.

|  | Valor inicial | Valor final |
|--|---------------|-------------|
| Velocidad absoluta del rotor (m/s)             | -5            | 5           |
| Velocidad de giro del rotor (rad/s)            | 1             | 900         |
| Ángulo formado por el rotor y la velocidad (°) | 90            | 0           |

Figura 7.16

El proceso de cálculo, como ya se ha dicho en capítulos anteriores puede tardar mucho tiempo, del orden de 19 horas si los intervalos de cálculo son los mostrados en la Figura 7.16, aunque obviamente esto dependerá del ordenador que esté ejecutando el programa.

El botón *Continuar sin calcular* sólo aparece cuando el archivo sobre el que se trabaja ha sido cargado, es decir, ya existía previamente. Si se pulsa este botón no se realiza de nuevo el cálculo de las *Cartas de navegación*, debido a que estas ya han sido calculadas. En su lugar, se accede al menú de estudio del vuelo de avance, al cual también se accede una vez que terminan todos los cálculos cuando se selecciona la opción *Calcular*.

Con este menú, mostrado en la Figura 7.17 se puede realizar un completo análisis aerodinámico del rotor modelado para cada uno de los regímenes de vuelo que conforman el intervalo de cálculo.

Para ello, se deben introducir los siguientes datos<sup>37</sup>:

- Velocidad absoluta del rotor.
- Velocidad de giro del rotor.
- Ángulo de inclinación del rotor respecto a la vertical.
- Ángulo que forma la velocidad con la línea horizontal.

Una vez rellenados los datos debe pulsarse el botón *Representar características de vuelo*. Se puede observar también en la Figura 7.17 que el menú muestra las características atmosféricas y constructivas de pala que han definido el diseño del rotor. Estos valores no pueden ser ya modificados.

<sup>37</sup> Los datos se corresponden con las variables de entrada a las *Cartas de navegación*. El tercer y cuarto valor determinan el ángulo entre rotor y velocidad.

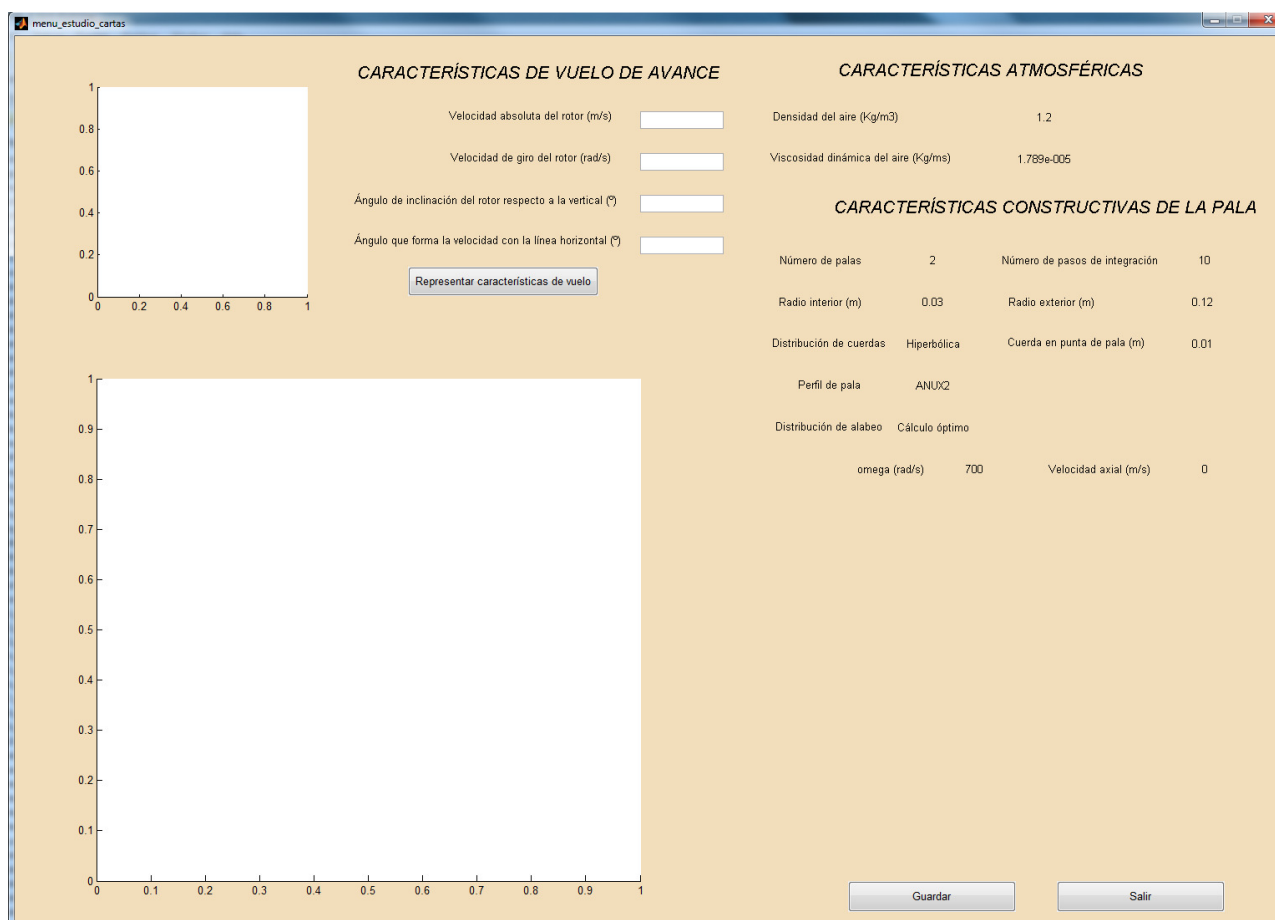


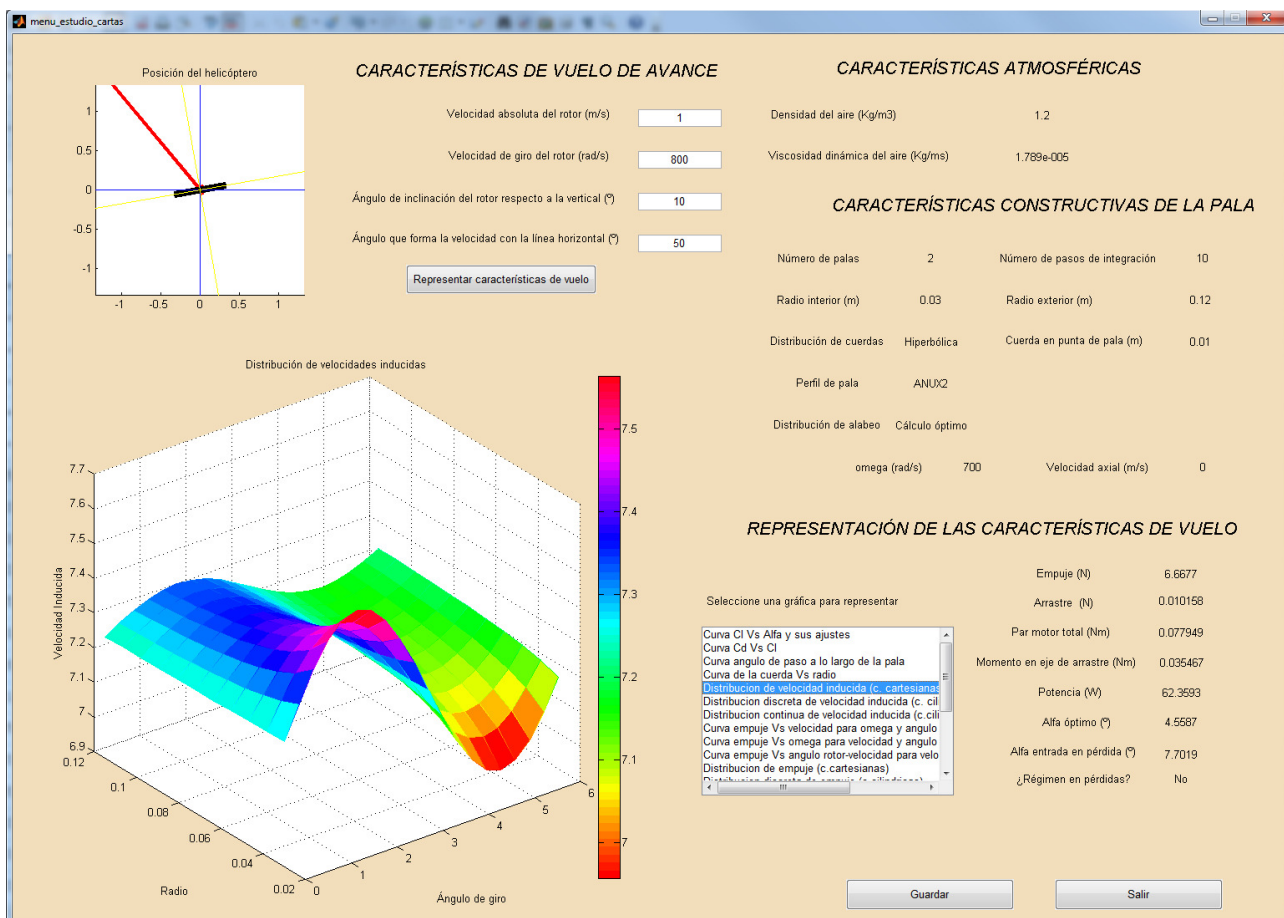
Figura 7.17

Este análisis muestra, para el régimen considerado para el estudio la siguiente información numérica:

- Empuje.
- Arrastre.
- Par motor total.
- Momento en el eje de arrastre.
- Potencia.
- Ángulo de ataque óptimo.
- Ángulo de ataque de entrada en pérdidas.
- Indicación de si el régimen introducido es de pérdidas o no.

De los ocho datos anteriores que se proporcionan el ángulo de ataque óptimo, y el de entrada en pérdidas no dependen del régimen a estudiar, sino del perfil de pala. El resto de valores son distintos, en general, para cada régimen.

La Figura 7.18 muestra una imagen de la información que proporciona el software.

**Figura 7.18**

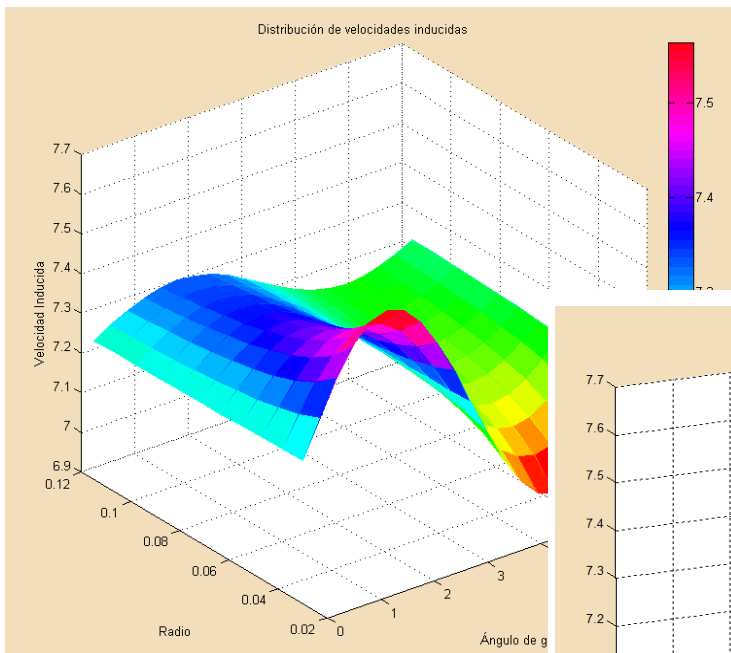
El programa no sólo permite obtener datos numéricos de cada régimen, sino que posee una salida gráfica muy potente. Las distintas representaciones que pueden obtenerse son:

- Curva  $c_i$  vs  $\alpha$ .
- Curva  $c_d$  vs  $c_l$ .
- Curva  $\theta$  vs  $r$ .
- Curva  $c$  vs  $r$ .
- Distribución de velocidad inducida (c. cartesianas) (Figura 7.19).
- Distribución discreta de velocidad inducida (c. cilíndricas) (Figura 7.20).
- Distribución continua de velocidad inducida (c. cilíndricas) (Figura 7.21).
- Curva  $T$  vs  $V$  para  $\Omega$  y  $\alpha_v$  constante (Figura 7.22).
- Curva  $T$  vs  $\Omega$  para  $V$  y  $\alpha_v$  constante (Figura 7.23).
- Curva  $T$  vs  $\alpha_v$  para  $V$  y  $\Omega$  constante (Figura 7.24).
- Distribución de empuje (c.cartesianas) (Figura 7.25).
- Distribución discreta de empuje (c.cilíndricas) (Figura 7.26).
- Distribución continua de empuje (c.cilíndricas) (Figura 7.27).
- Curva  $P$  vs  $V$  para  $\Omega$  y  $\alpha_v$  constante (Figura 7.28).
- Curva  $P$  vs  $\Omega$  para  $V$  y  $\alpha_v$  constante (Figura 7.29).
- Curva  $P$  vs  $\alpha_v$  para  $V$  y  $\Omega$  constante (Figura 7.30).
- Distribución de ángulo de ataque (c.cartesianas) (Figura 7.31).
- Distribución discreta de ángulo de ataque (c.cilíndricas) (Figura 7.32).

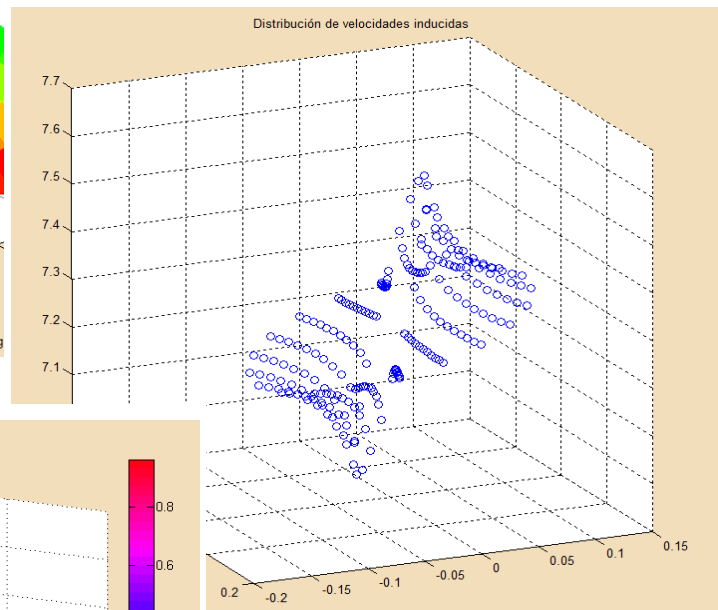
- Distribución continua de ángulo de ataque (c. cilíndricas) (Figura 7.33).
- Región de  $\mathbf{V} - \mathbf{\Omega}$  sin pérdidas (Figura 7.34).

Las cuatro primeras curvas son las mismas que las obtenidas en las Figuras 7.6, 7.7, 7.8 y 7.10 por lo que no requieren más explicación.

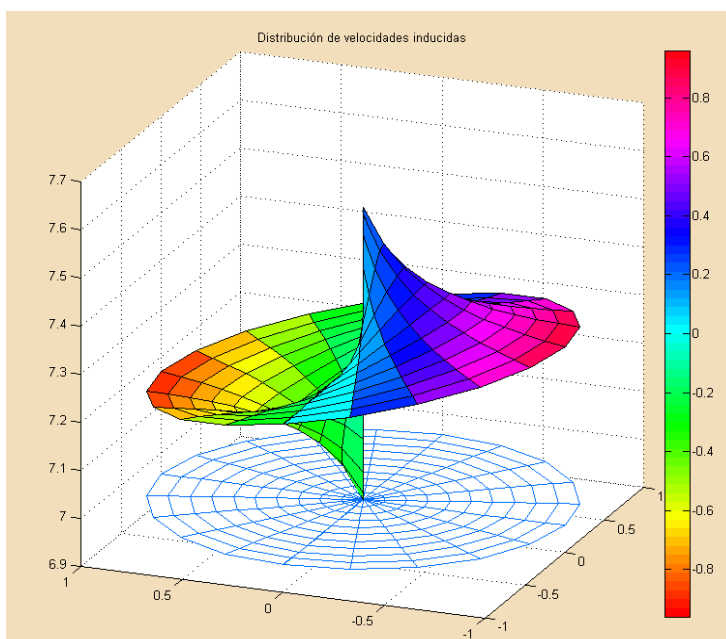
Las gráficas de distribución de velocidad inducida muestran el valor de la variable  $\mathbf{v}_i$  en función de la posición radial  $\mathbf{r}$  y del ángulo azimutal  $\mathbf{\Psi}$ . Debe recordarse que para regímenes de vuelo distintos al axial, el elemento diferencial de área para los cálculos aerodinámicos era  $\mathbf{r} \, d\mathbf{r} \, d\mathbf{\Psi}$ . Las gráficas pueden obtenerse en coordenadas cilíndricas o cartesianas tal y como se muestra a continuación:



**Figura 7.19**



**Figura 7.20**



**Figura 7.21**

Las siguientes representaciones relacionan la fuerza de empuje del rotor con cada una de las tres variables de entrada de las *Cartas de navegación*, por separado; de manera que queden fijadas las otras dos con el valor especificado por el usuario en la parte superior del menú.

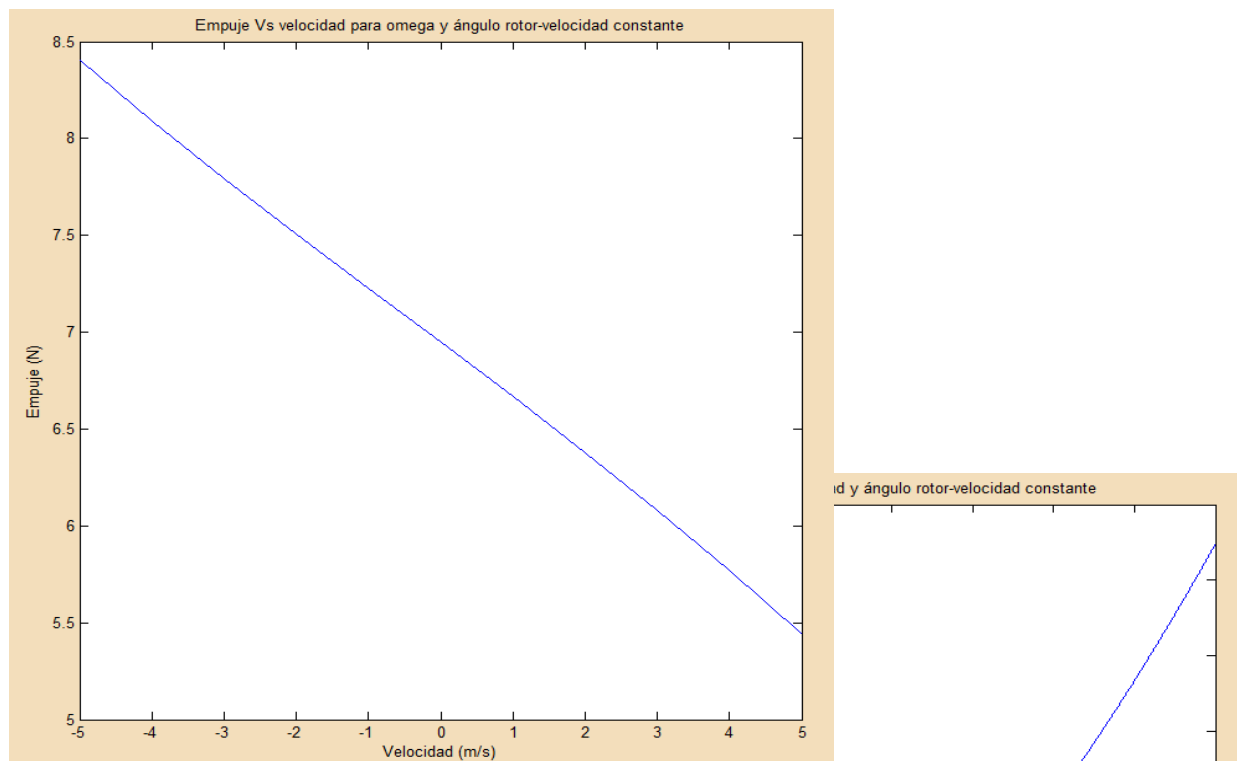


Figura 7.22

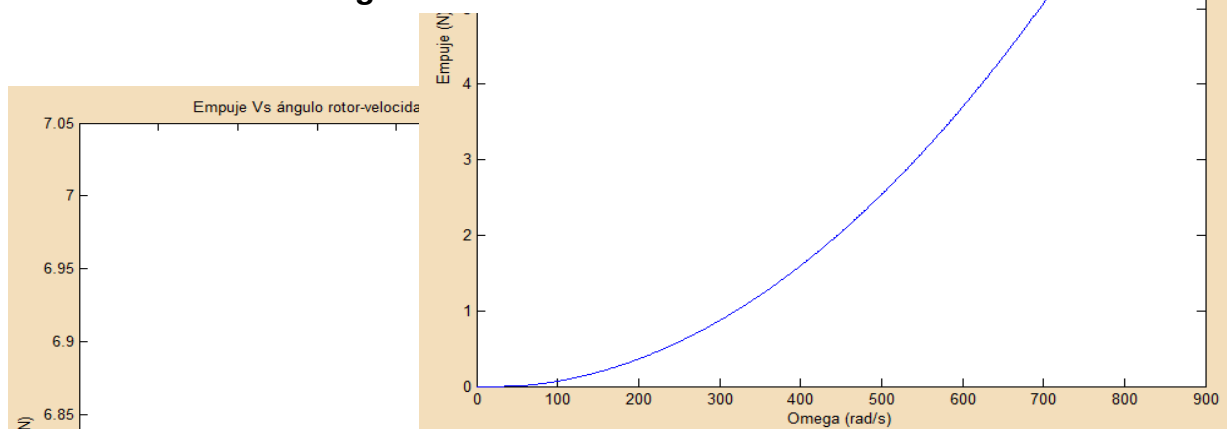


Figura 7.23

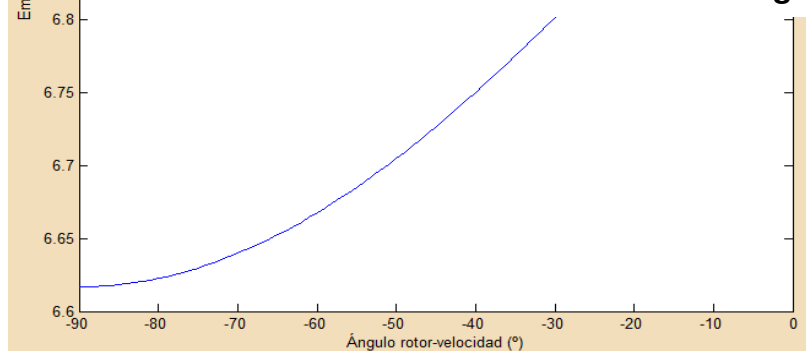
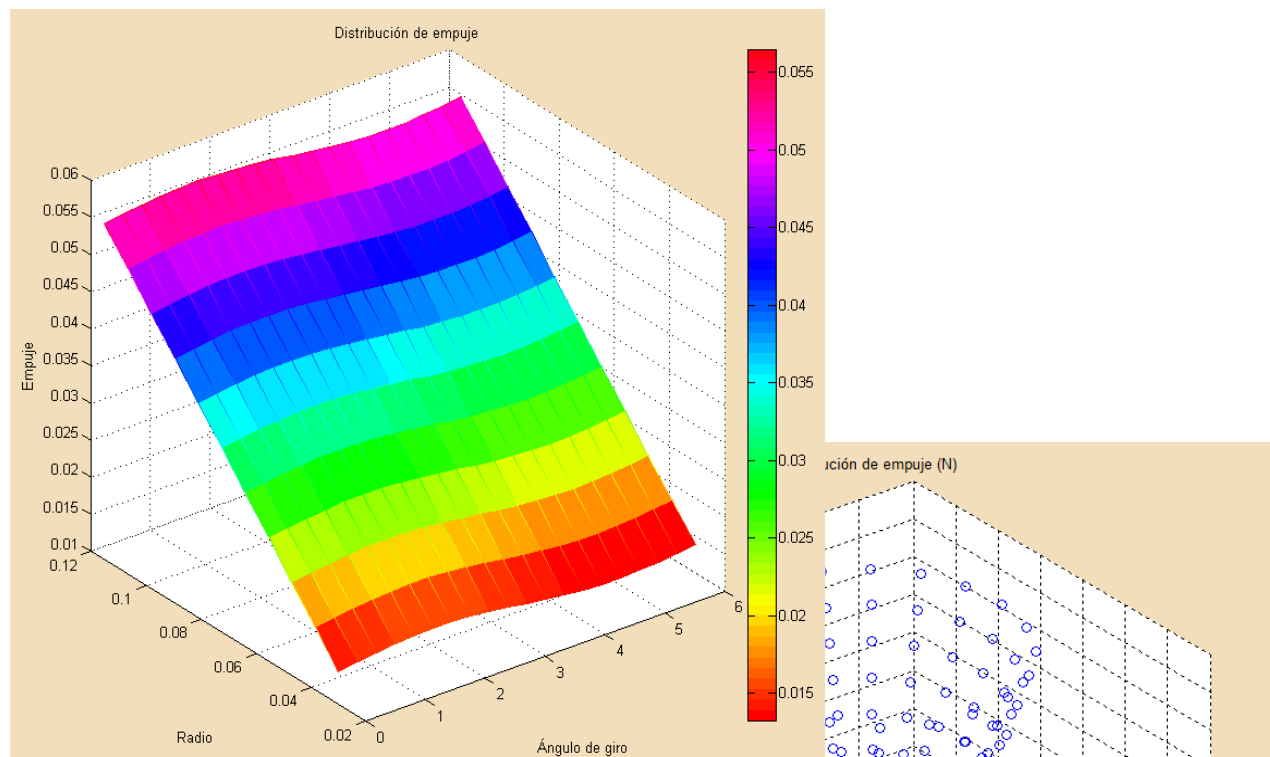
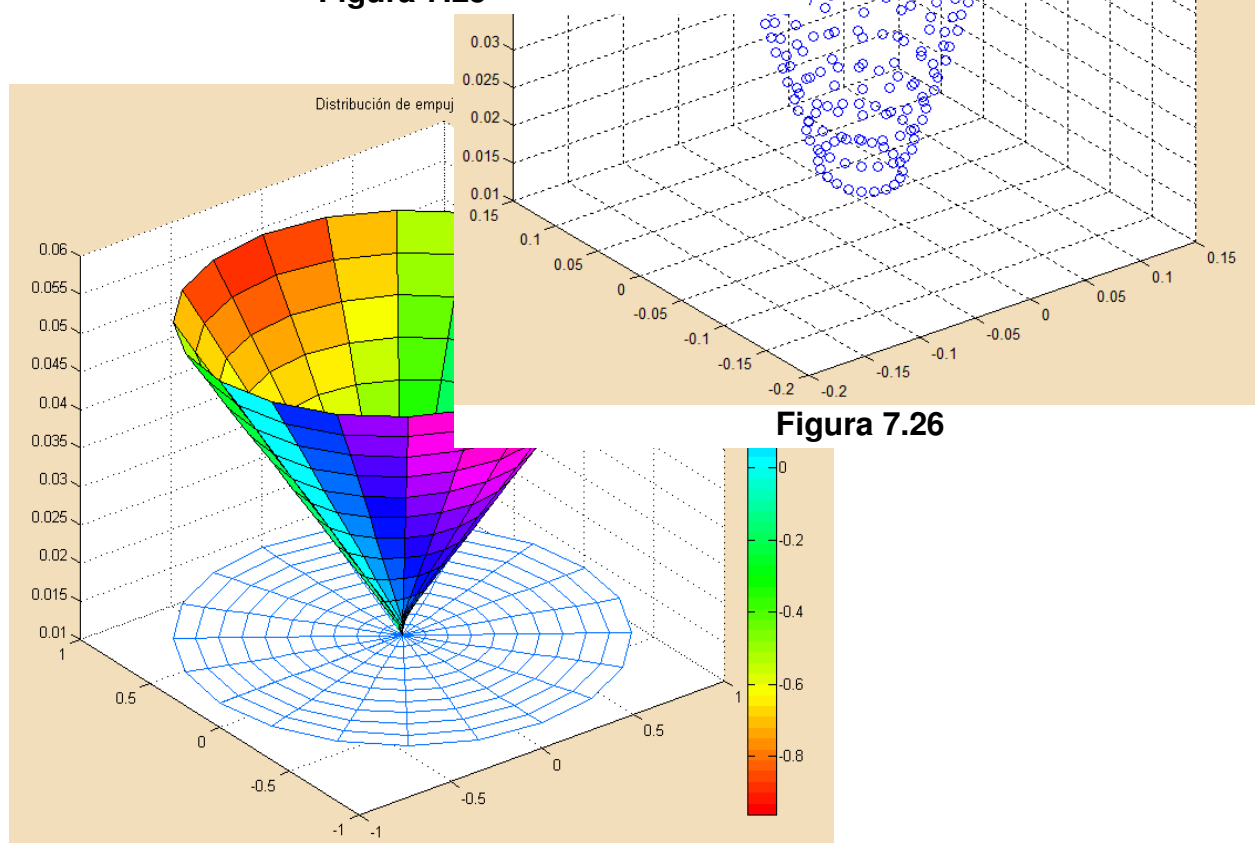


Figura 7.24

Las gráficas de distribución de empuje muestran el valor de la variable  $T$  en función de la posición radial  $r$  y del ángulo azimutal  $\Psi$ , al igual que se hizo para la velocidad inducida. Las gráficas pueden obtenerse en coordenadas cilíndricas o cartesianas tal y como se muestra a continuación:



**Figura 7.25**



**Figura 7.26**

**Figura 7.27**

Las siguientes representaciones relacionan la potencia necesaria para conseguir el par requerido por el rotor con cada una de las tres variables de entrada de las *Cartas de navegación*, por separado; de manera que queden fijadas las otras dos con el valor especificado por el usuario en la parte superior del menú, tal y como se hizo para la fuerza de empuje.

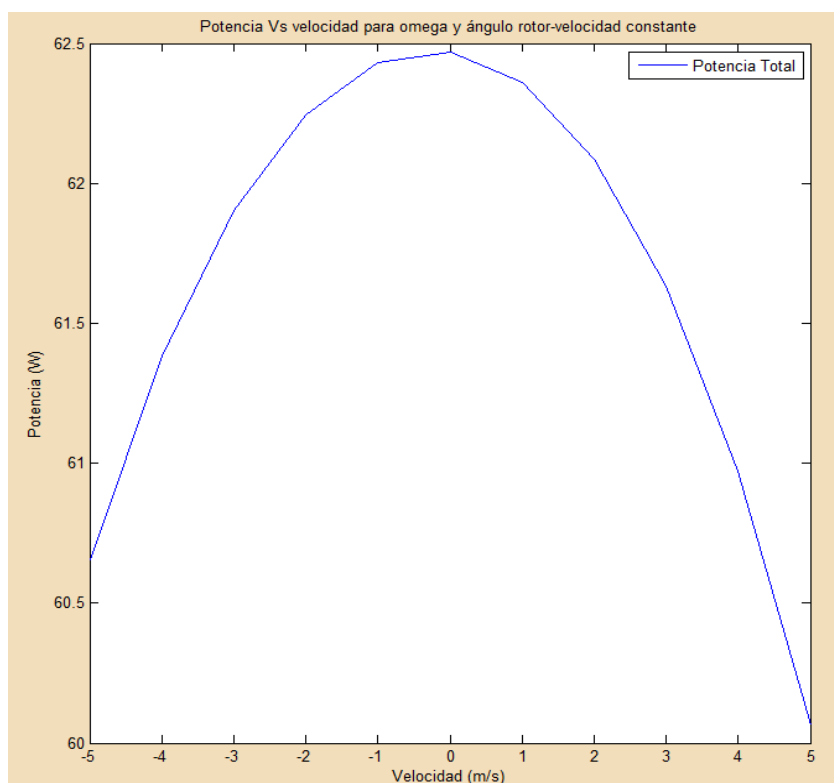


Figura 7.28

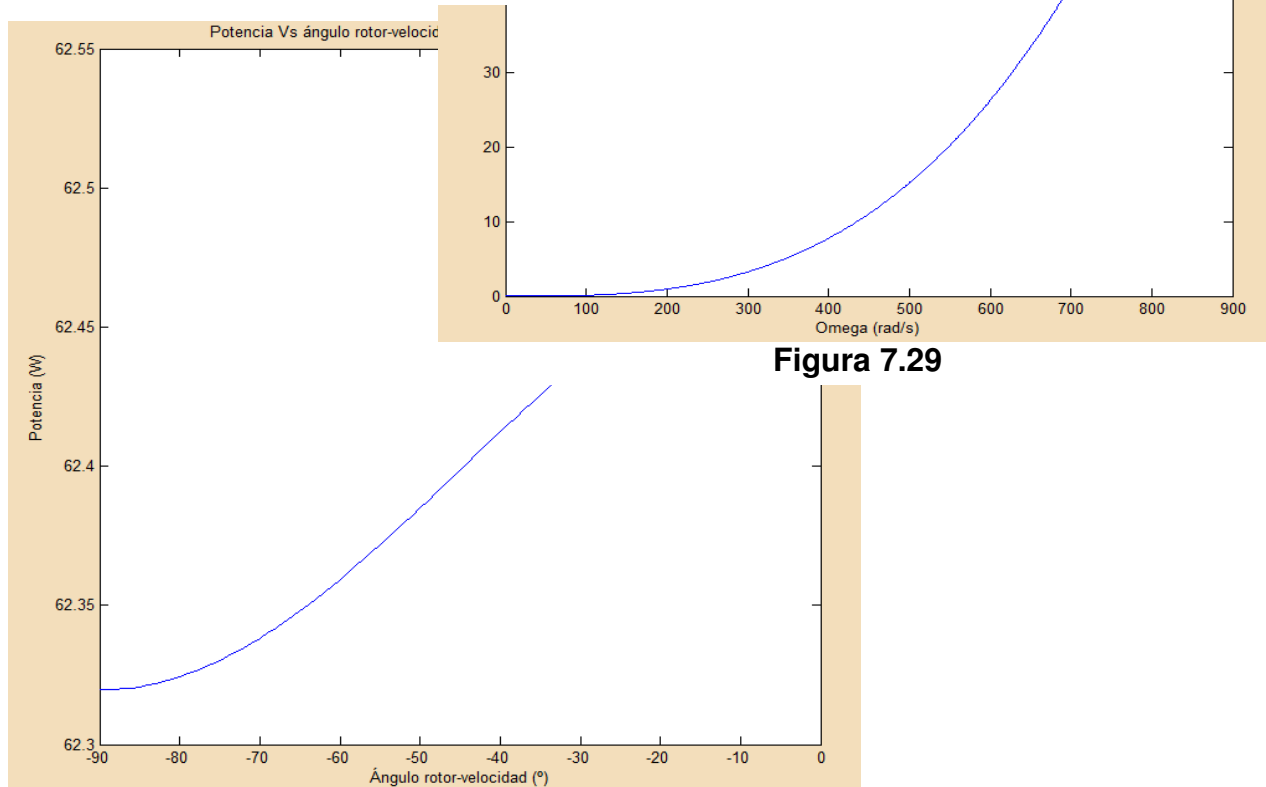


Figura 7.29

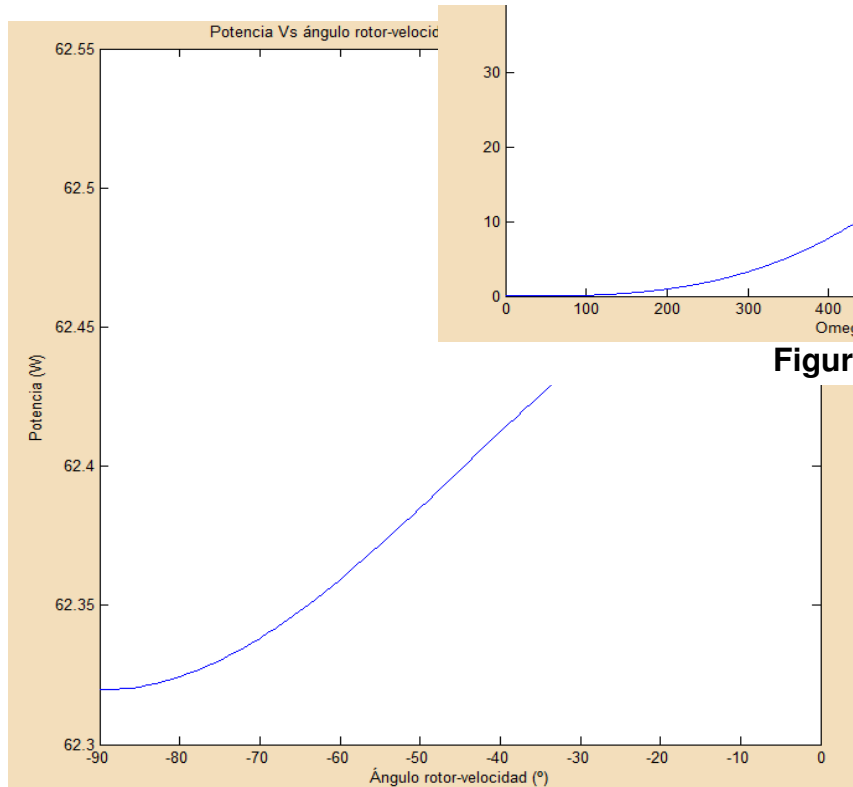


Figura 7.30

Las gráficas de distribución de ángulo de ataque muestran el valor de la variable  $\alpha$  en función de la posición radial  $r$  y del ángulo azimutal  $\Psi$ . Las gráficas pueden obtenerse en coordenadas cilíndricas o cartesianas tal y como se muestra a continuación:

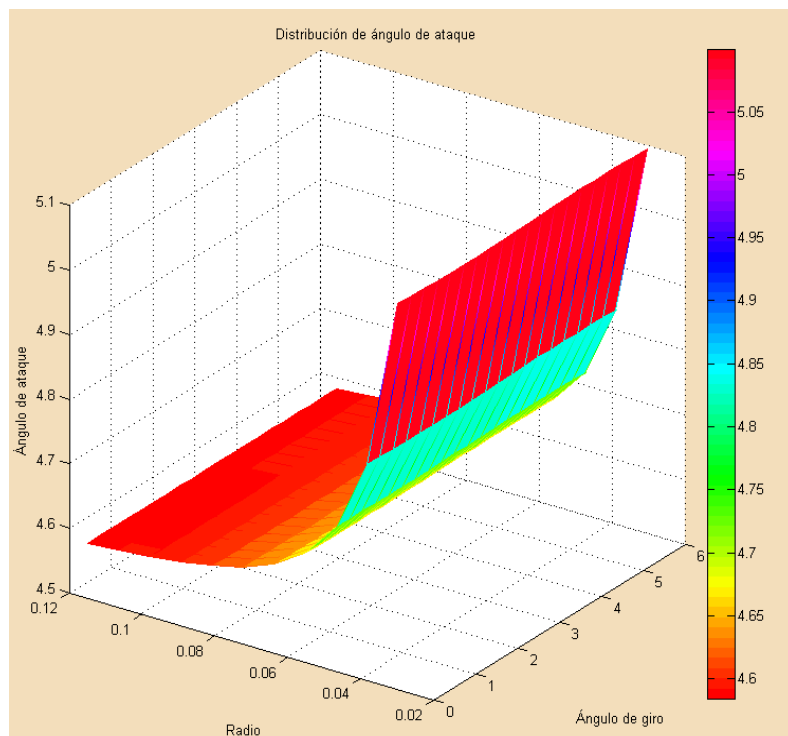


Figura 7.31

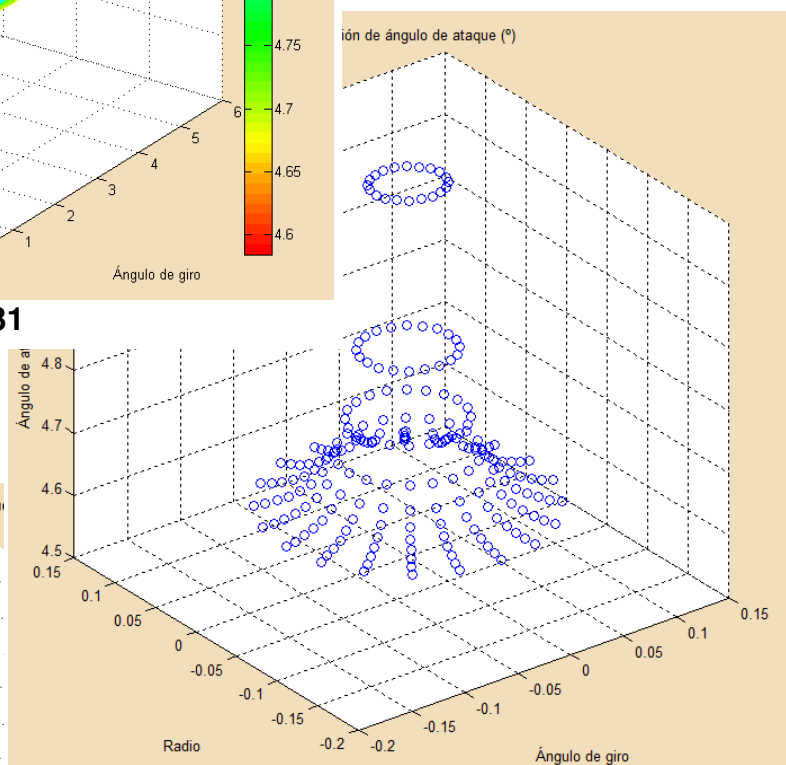


Figura 7.32

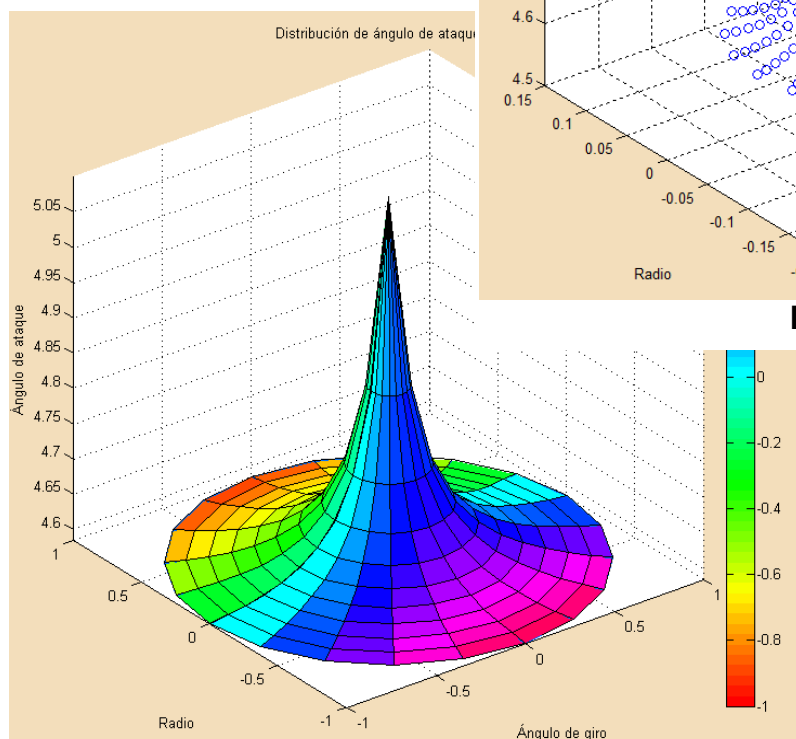
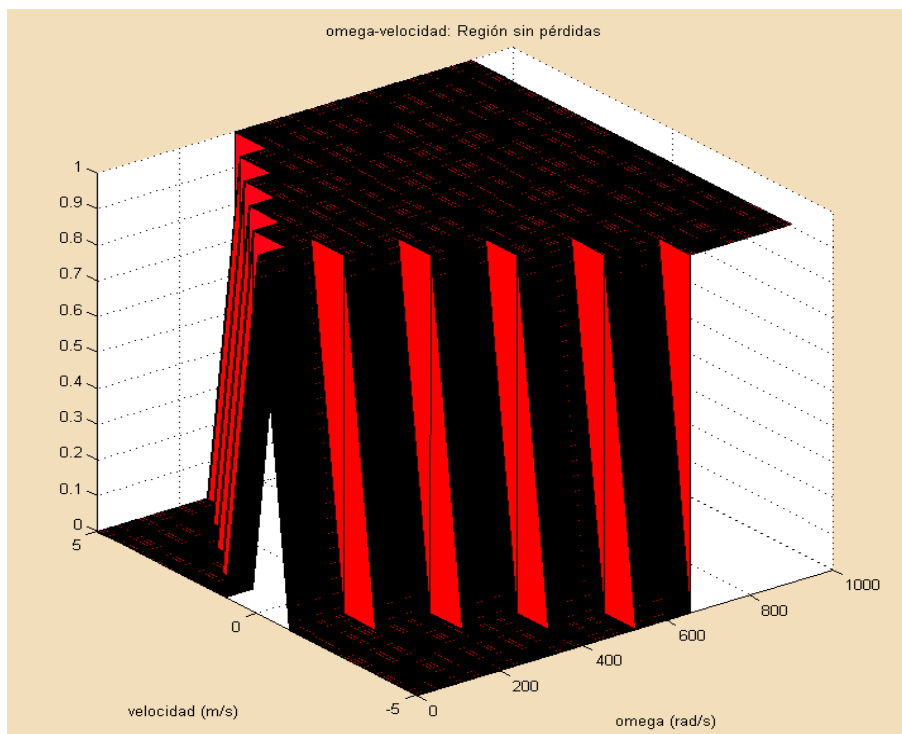


Figura 7.33



Por último, se obtiene una gráfica que muestra las regiones (las combinaciones de regímenes  $V - \Omega$ ) que se encuentran en pérdidas, representadas con el valor 0, para distinguirlas del resto, representadas con el valor 1.



**Figura 7.34**

Las salidas gráficas anteriores, junto con los valores numéricos son puramente informativos. Sirven al usuario del software para terminar de validar el modelo del rotor. Por ejemplo, puede conocer qué régimen es de pérdida y cual no, qué potencia mecánica necesita para alcanzar un determinado régimen, cómo son las distribuciones de velocidad inducida, de empuje y de ángulo de ataque, etc... Como es lógico el usuario no estudiará cada régimen con detalle, pero puede que le convenga detenerse en alguno.

La modelización aerodinámica termina en este punto. El programa muestra las opciones de *Salir* y *Guardar* en la Figura 7.18. Si el rotor estudiado ha sido previamente cargado, es decir ya existe un archivo que almacena la información del mismo se puede abandonar el programa sin pulsar *Guardar*. Pero si se ha diseñado un nuevo modelo de rotor será necesario hacer click sobre este botón para no perder toda la información.

Una vez explicado el programa en lo referente a *Cálculo del rotor* de la Figura 7.2, se procede a mostrar el menú de modelización de un quadrotor cuando sobre el menú de la citada figura se pulsa sobre *Crear nuevo archivo*. Se vuelve a recordar que para llevar a cabo una modelización completa del helicóptero es necesario tener previamente almacenado al menos un archivo de modelo de rotor.

**MODELIZACIÓN DEL QUADROTOR**

**DISEÑO DE LA ESTRUCTURA**

1. Caja central Longitud (m)  Material

2. Brazos Longitud (m)  Material

Radio (m)  Ángulo entre brazos (°)  Ángulo de inclinación (°)

**DISEÑO DE LA CAJA DE COMPONENTES ELECTRÓNICOS**

Longitud (m)  Anchura (m)  Espesor (m)  Masa (Kg)

**ELECCIÓN DE LOS MOTORES**

**ELECCIÓN DE LAS BATERÍAS**

☐ **DISEÑO DE UNA CARGA ADICIONAL**

**DATOS TOTALES DEL QUADROTOR**

Masa total (Kg)  Distancia de los rotores al C.G (m)

**CARGAR ROTOR**

Número de palas  Número de pasos de integración

Radio interior (m)  Radio exterior (m)

Distribución de cuerdas  Cuerda en punta de pala (m)

Perfil de pala

Distribución de alabeo

Gráfico de salida: Eje Y (0 a 1), Eje X (0 a 1)

Figura 7.35

La Figura 7.35 muestra el estado inicial de este menú. A la izquierda de la pantalla aparecen las características constructivas de pala sin rellenar, a la espera de que el usuario cargue un modelo de rotor pulsando sobre *Cargar rotor*. Inicialmente es posible rellenar los datos de la estructura, la caja de componentes electrónicos y de la carga adicional, pero no los de los motores y la batería ya que es necesario cargar un rotor para poder seleccionar el modelo de estos elementos<sup>38</sup>.

El menú consta también de una salida gráfica que muestra la configuración del quadrotor diseñado. De esta forma el usuario puede ver el modelo de quadrotor que ha configurado a través de las opciones y los datos introducidos.

No es objeto de este capítulo repetir cuáles son las variables a introducir, ya que estas quedaron suficientemente claras en el Capítulo 4.

La Figura 7.36 muestra una imagen del menú anterior una vez introducidos todos los datos (y sin carga adicional). Cuando se pulsa el botón *Calcular* aparecen tres botones adicionales:

- *Representar* para obtener una salida gráfica del quadrotor configurado. Si ahora se desea cambiar algún parámetro del diseño basta con hacerlo y pulsar nuevamente en *Calcular*. Para la visualización del cambio, si es geométrico, se pulsa otra vez

<sup>38</sup> Esto es debido a que la selección de los motores y la batería requiere el conocimiento de las *Cartas de navegación* de un rotor, tal y como se explicó en el Capítulo 4.

sobre *Representar*. La Figura 7.36 muestra esta salida gráfica.

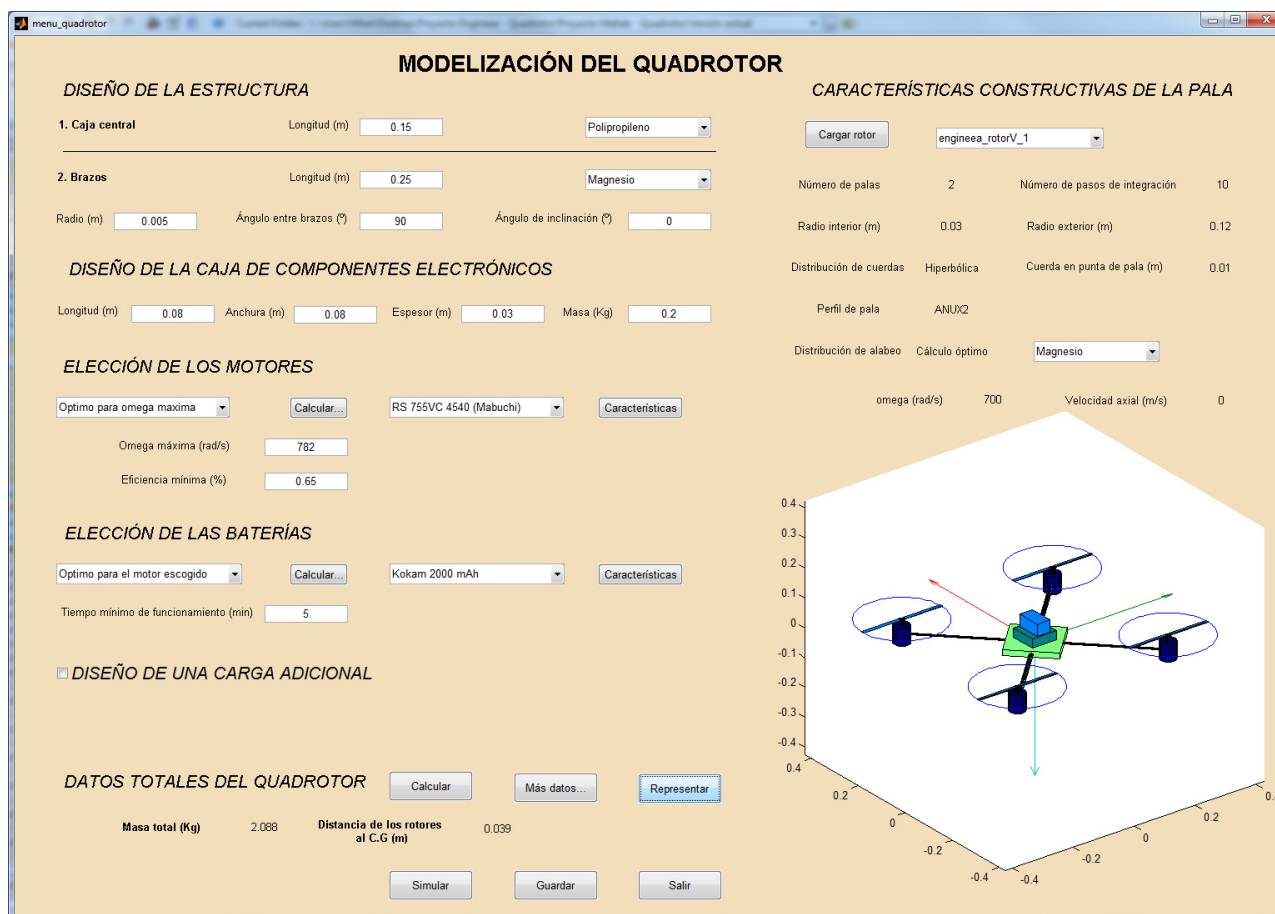


Figura 7.36

- *Más datos* proporciona más información del quadrotor modelado. Resulta muy útil esta opción antes de validar el diseño del helicóptero. Se obtiene una salida que contiene información de la masa, la inercia y las coordenadas del centro de gravedad. Además, se proporcionan datos de interés para dos regímenes habituales: el de hover, y el de velocidad de giro máxima de los motores. Para cada uno de estos vuelos se obtiene la siguiente información:

- Empuje de cada rotor<sup>39</sup>.
- Velocidad de giro de cada rotor.
- Par de cada rotor.
- Intensidad consumida por motor.
- Intensidad consumida total.
- Potencia mecánica de cada rotor.
- Potencia mecánica total.
- Potencia eléctrica total.
- Potencia eléctrica máxima aportada por la batería<sup>40</sup>.
- Tiempo de duración máximo.

<sup>39</sup> Valor obtenido sólo para el régimen de hover.

<sup>40</sup> Valor que no depende del régimen de vuelo. La potencia eléctrica máxima que puede aportar la batería depende únicamente de la propia batería.

Finalmente, también se presenta una simulación, no en tiempo real, del comportamiento del quadrotor durante 12 segundos en los que se ensayan los regímenes de hover, velocidad de giro máxima y corte del suministro de energía.

De esta forma, el conjunto de información mostrada en la Figura 7.37 puede resultar de extrema importancia para el modelado, ya que permite conocer el funcionamiento básico del helicóptero y decidir así si se pasa a la etapa de simulación en tiempo real o se modifica algún parámetro.

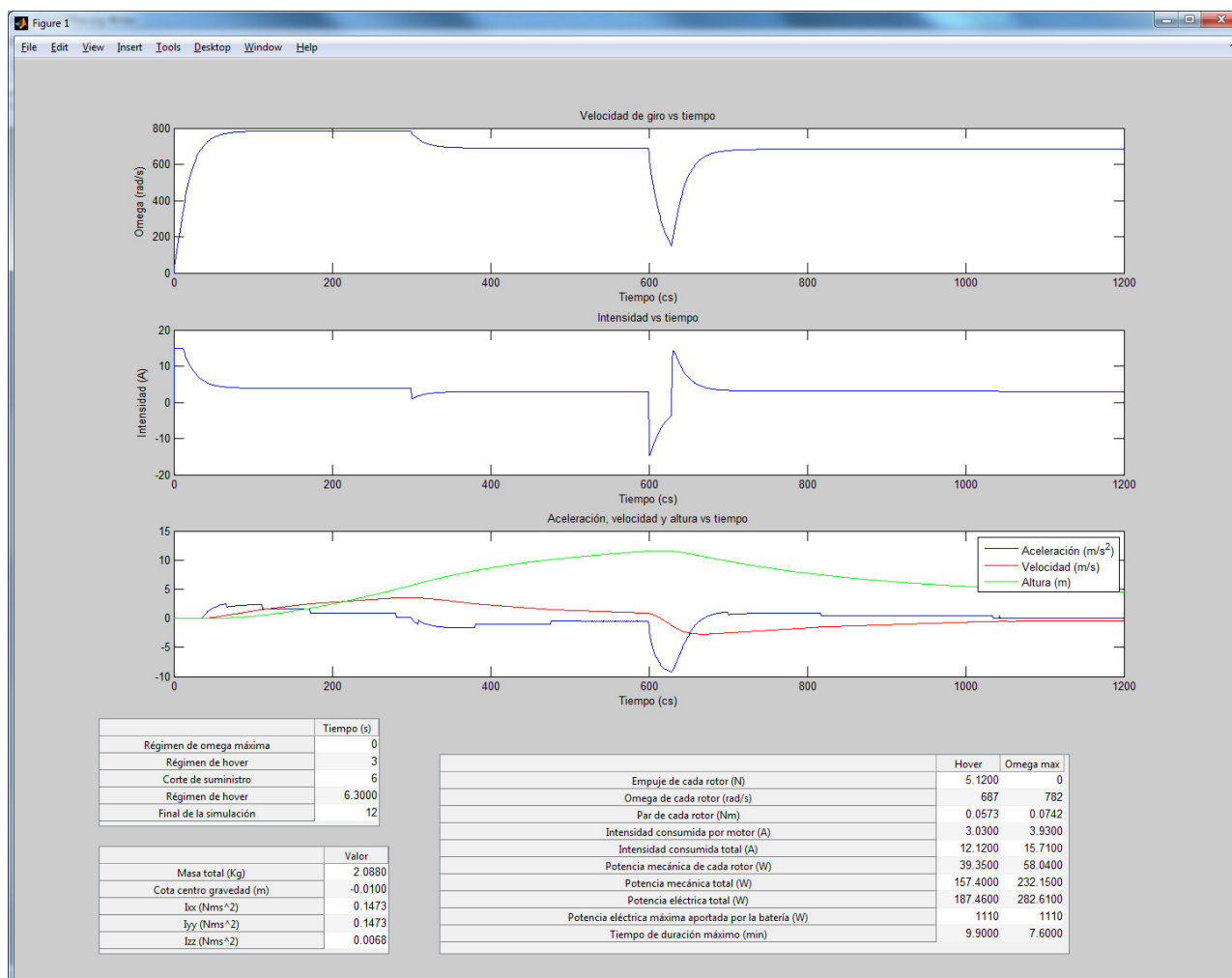


Figura 7.37

Existen también dos botones denominados *Características*, uno para los motores y otro para la batería que muestran información específica de estos elementos, tal y como se explicó en el Capítulo 4.

La Figura 7.38 muestra una imagen de la salida del programa cuando se solicita información del motor seleccionado. La Figura 7.39 se refiere a la información de la batería escogida.

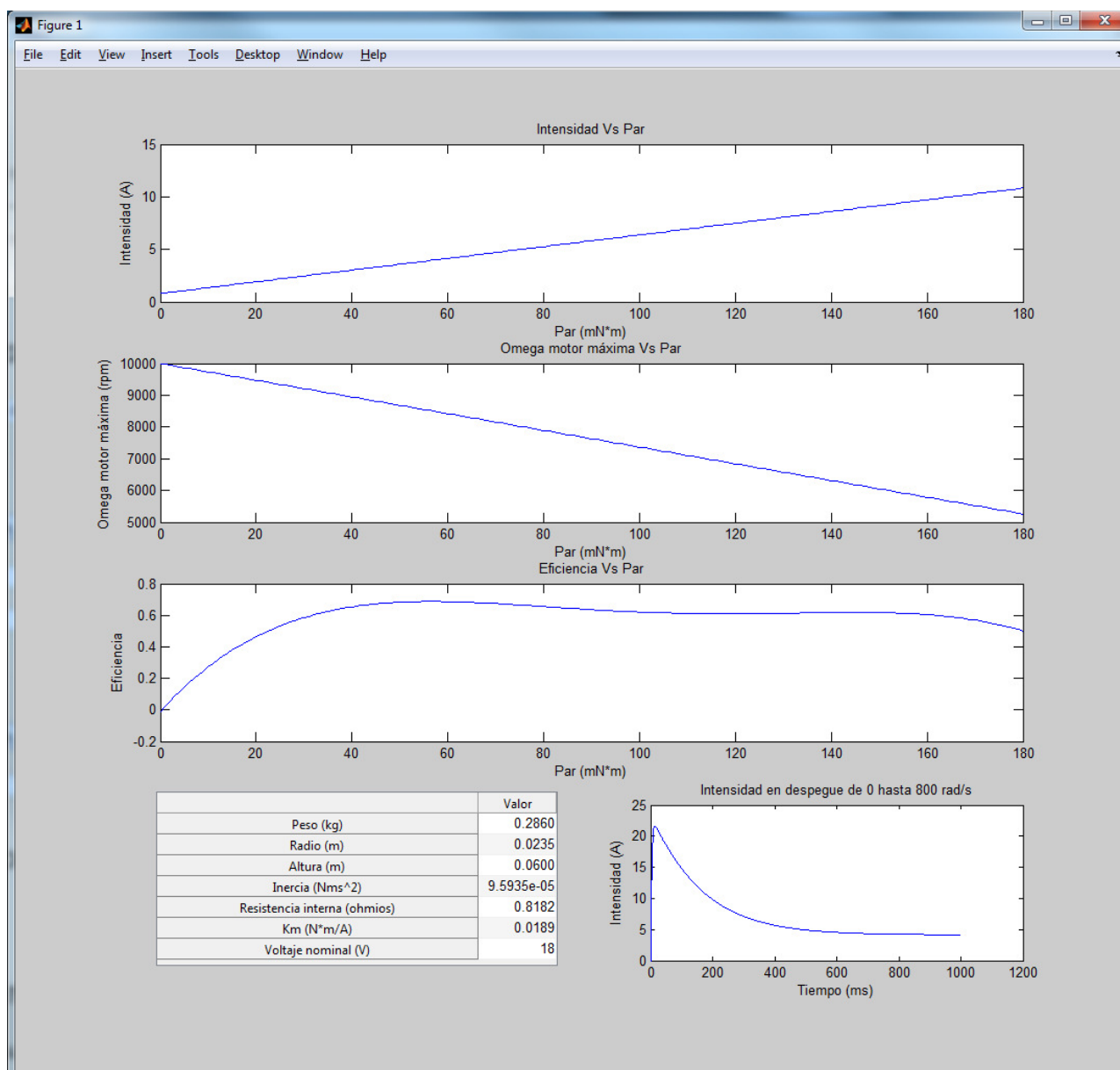


Figura 7.38

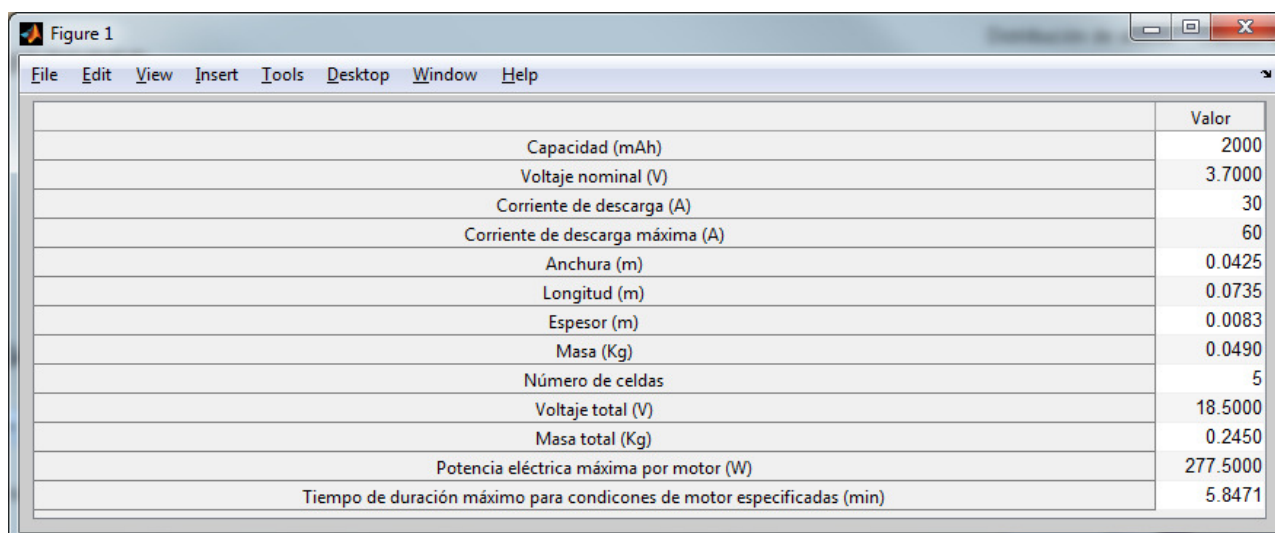
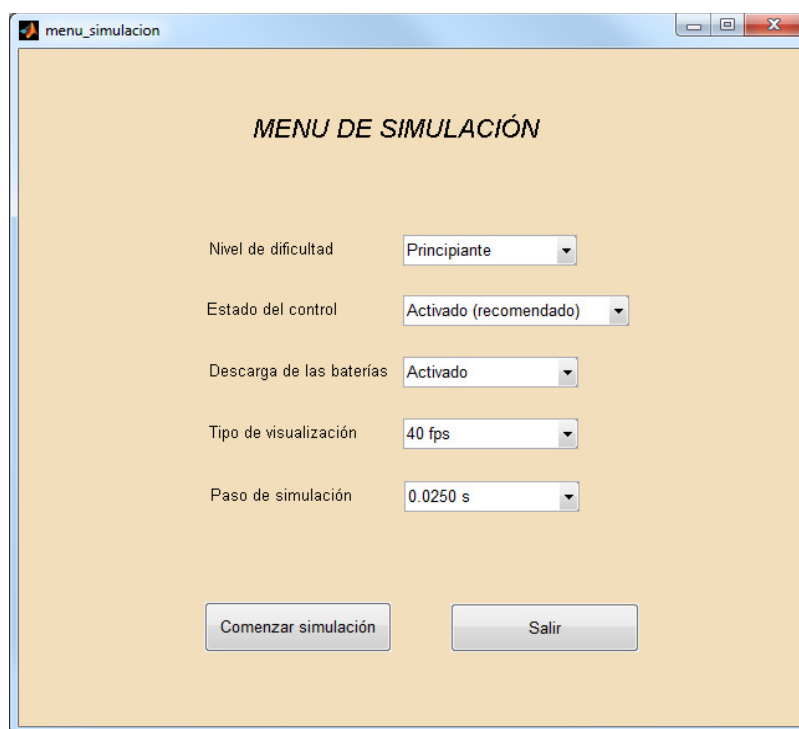


Figura 7.39

- *Simular* permite acceder al último de los menús antes del comienzo de la simulación.



**Figura 7.40**

La Figura 7.40 muestra las siguientes opciones:

- Nivel de dificultad: La diferencia entre niveles radica en la amplitud máxima de la consigna que manda el joystick cuando se realiza el vuelo de avance.
  - Principiante: 5º.
  - Intermedio: 15º.
  - Avanzado: 30º.
  - Extremo: 60º.
- Estado del control: Puede estar activado o desactivado.
- Descarga de la batería: Puede estar activada o desactivada. Si está activada, el tiempo que dura la simulación está limitado hasta el agotamiento de la batería.
- Tipo de visualización: Indica el valor de frames por segundo para la representación.
- Paso de simulación: Relacionado con el tipo de visualización.

Si el usuario pulsa sobre el botón *Comenzar simulación* esta empezará a ejecutarse y se mostrará por pantalla la interface gráfica del simulador. El botón *Salir* abandona el programa.

## 8. MANUAL DE PROGRAMADOR

En este capítulo se presenta una breve exposición sobre la estructura de la programación. La Figura 8.1 muestra un esquema con el nombre de los principales archivos del programa junto con su extensión. El elevado contenido de líneas de programación hace imposible presentar aquí todo el código. Por ello, se remite al lector interesado a consultar la carpeta de archivos que se adjunta con el presente documento.

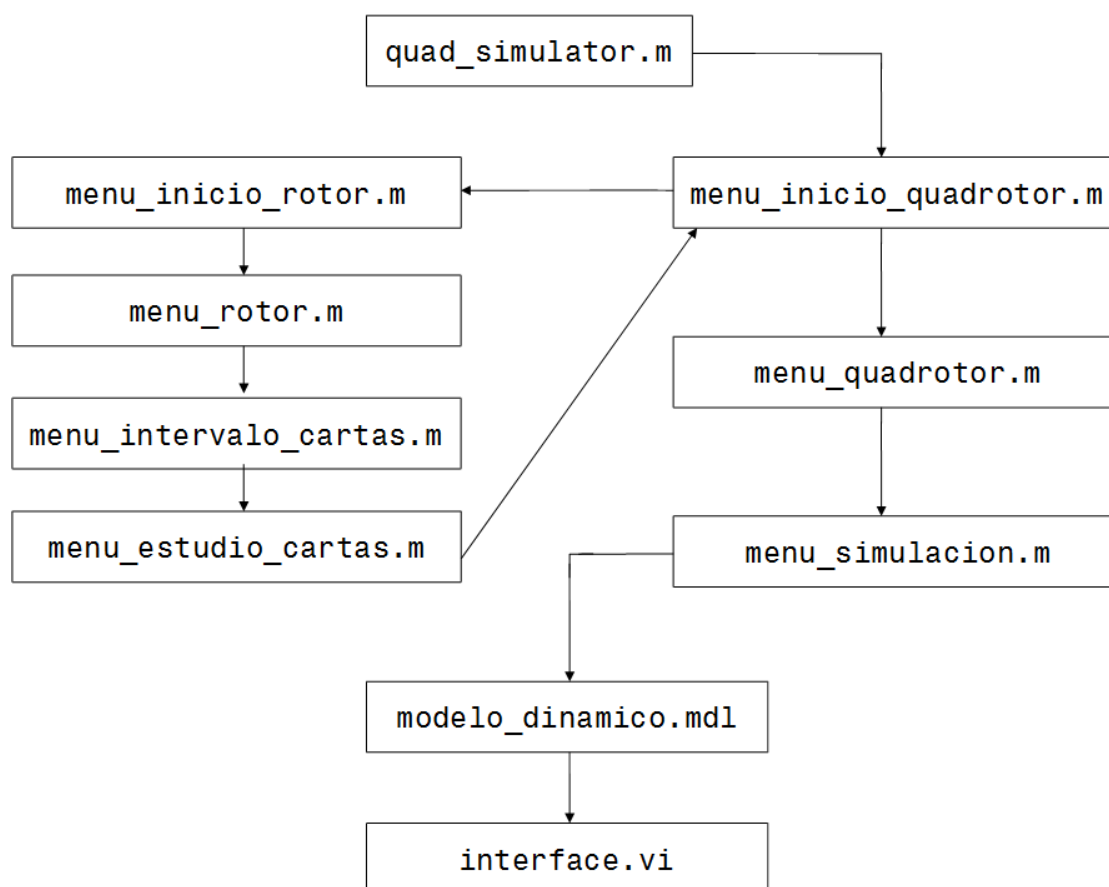


Figura 8.1



## 9. BIBLIOGRAFÍA

- [1] QUATERNIONS AND ROTATION SEQUENCES. J. B. Kuipers. Ed. Princeton University Press 1999.
- [2] HELICÓPTEROS. TEORÍA Y DISEÑO CONEPTUAL. J. L. López Ruiz. Ed. E.T.S.I. Aeronáuticos 1993.
- [3] ROTARY-WING AERODYNAMICS. W. Z. Stepniewsky. C. N. Keys. Ed. Dover 1984.
- [4] MECÁNICA DE LA PARTÍCULA Y DEL SÓLIDO RÍGIDO. J. Agulló. Ed. OK Punt 1996.
- [5] MECÁNICA DE FLUÍDOS. Frank M. White. Ed. McGraw Hill 2004.
- [6] MATLAB EN CINCO LECCIONES DE NUMÉRICO. V. Domínguez, M<sup>a</sup> L. Rapún. Ed. Universidad Pública de Navarra 2007.
- [7] DESIGN AND CONTROL OF QUADROTORS WITH APPLICATION TO AUTONOMOUS FLYING. S. Bouabdallah. Ed. EPFL 2007.
- [8] MODELLING, IDENTIFICATION AND CONTROL OF A QUADROTOR HELICOPTER. T. Bresciani. Department of Automatic Control 2008.
- [9] MODELLING AND CONTROL OF MINI-FLYING MACHINES. P. Castillo, R. Lozano, A. E. Dzul. Ed. Springer 2005.
- [10] A SMALL SEMI-AUTONOMOUS ROTARY-WING UNMANNED AIR VEHICLE. S.D. Hanford. Thesis 2005.
- [11] CONTROL OF A QUADROTOR HELICOPTER USING DUAL CAMERA VISUAL FEEDBACK. E. Altug, J.P. Ostrowski, C.J. Taylor. International Conference on Robotics and Automation. Taiwan September 2003.
- [12] PID VS LQ CONTROL TECHNIQUES APPLIED TO AN INDOOR MICRO QUADROTOR. S. Bouabdallah, A. Noth, R. Siegwart. International Conference on *Intelligent Robots and Systems*, 2004.
- [13] DESIGN PRINCIPLES OF LARGE QUADROTORS FOR PRACTICAL APPLICATIONS. P. Pounds, R. Mahony. International Conference on *Robotics and Automation*, Japan May 2009.
- [14] IMAGE-BASED VISUAL SERVO CONTROL OF THE TRANSLATION KINEMATICS OF A QUADROTOR AERIAL VEHICLE. O. Bourquardez, R. Mahony, N. Guenard, F. Chaumette, T. Hamel, L. Eck. *IEEE Transactions on Robotics* pp 743 – 749, 2009.



- [15] GEORGIA TECH TEAM ENTRY FOR THE 2010 AUVSI INTERNATIONAL AERIAL ROBOTICS COMPETITION. G. Chowdhary, D.M. Sobers, C. Pravitra, C. Christmann, A. Wu, H. Hashimoto, C. Ong, R. Kalghatgi, E.N. Johnson. [Georgia Institute of Technology](#), 2010.
- [16] MODELADO Y CONTROL DE HELICÓPTEROS AUTÓNOMOS. REVISIÓN DEL ESTADO DE LA TÉCNICA. M. Béjar, A. Ollero. [\\_RIAI](#) pp – 16, Octubre 2008.
- [17] MODELLING AND CONTROL OF A LARGE QUADROTOR ROBOT. P. Pounds, R. Mahony, P. Corke. Preprint submitted to Elsevier, Septiembre 2010.
- [18] SMALL-SCALE AEROLASTIC ROTOR SIMULATION, DESIGN AND FABRICATION. P. Pounds, R. Mahony. [\\_Australian National University](#), 2005.
- [19] THE ROLE OF PROPELLER AERODYNAMICS IN THE MODEL OF A QUADROTOR UAV. P.J. Bristeau, P. Martin, E. Salaün, N. Petit. Proceedings of the European Control Conference pp 683 - 688, Agosto 2009.
- [20] QUADROTOR HELICOPTER TRAJECTORY TRACKING CONTROL. G. M. Hoffmann, S.L. Waslander, C. J. Tomlin. AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, Agosto 2008.
- [21] DESIGN AND CONTROL OF AN INDOOR MICRO QUADROTOR. S. Bouabdallah, P. Murrieri, R. Siegwart. International Conference on Robotics and Automation, Mayo 2004.
- [22] QUADROTOR UNMANNED AERIAL VEHICLE. C. Canetta, J. Chin, S. Mehrabian, L. Montejo, H. Thompson. Columbia University, Mayo 2007.
- [23] CONTROLADOR FUZZY DE UN QUADROTOR. F. Morata Palacios. Universidad Complutense de Madrid. 2009.

## 10. ANEXOS

### ANEXO A: Cálculos aerodinámicos

Los cálculos aerodinámicos describen el comportamiento de las palas que forman el rotor. En particular, es importante el cálculo del empuje que produce cada rotor, así como el par y la potencia.

Los cálculos del modelo del rotor se han hecho mediante la combinación de la teoría de cantidad de movimiento y la teoría del elemento de pala, lo cual implica dos análisis distintos.

#### A.1 Teoría de la cantidad de movimiento

La teoría de la cantidad de movimiento permite determinar las fuerzas que actúan sobre un rotor por medio de la variación de la cantidad de movimiento de la masa de aire afectada.

Las hipótesis que se plantean a continuación son las siguientes:

- El rotor se modela como un disco de espesor despreciable capaz de comunicar energía al aire.
- La única masa de aire afectada es la que circula por un tubo de corriente cuya sección recta en la zona del disco es un círculo de radio igual al del rotor. (Hipótesis de Glauert).
- La velocidad vertical del aire es continua a través del disco.
- El aire se toma como un gas perfecto e incompresible.

Se considera el siguiente tubo de corriente:

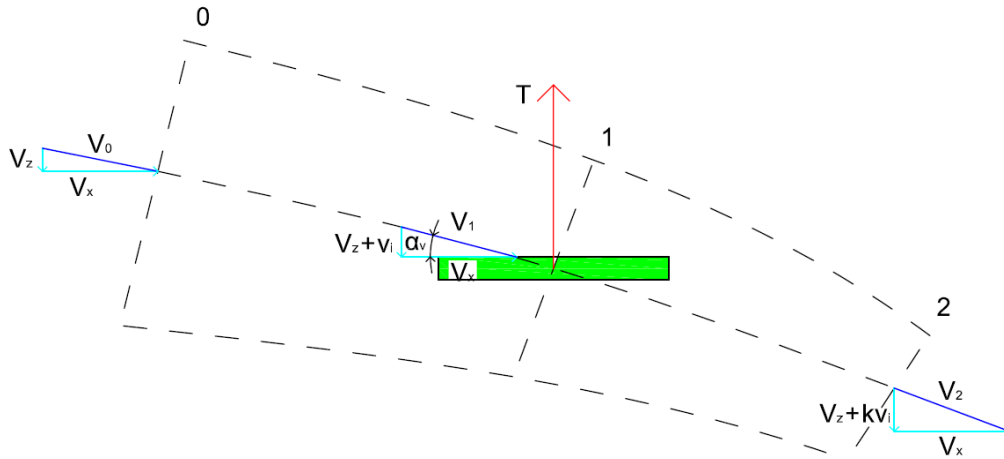


Figura 10.1

Se llamará  $V_0$  a la velocidad del aire respecto al rotor en el infinito aguas arriba (sección 0),  $V_1$  a la velocidad del aire respecto al rotor en la sección 1, y  $V_2$  a la velocidad del aire respecto al rotor en el infinito aguas abajo (sección 2).

El área de la sección recta del tubo de corriente en la zona del rotor será igual al área del rotor:

$$S = \pi R^2 \quad (10.1)$$

La masa de aire afectada por el rotor por unidad de tiempo es:

$$\dot{m} = \rho S V_1 = \rho S \sqrt{V_x^2 + (V_z + v_i)^2} \quad (10.2)$$

De acuerdo a esta teoría, para una situación estacionaria, el cambio de cantidad de movimiento del aire al pasar del infinito aguas arriba al infinito aguas abajo es igual a la tracción resultante de las acciones del aire sobre el rotor, igual y opuesta a las del rotor sobre el aire.

$$T = \dot{m}(k v_i) = k \rho S v_i \sqrt{V_x^2 + (V_z + v_i)^2} \quad (10.3)$$

En la expresión anterior,  $k$  es el factor de velocidad inducida.

La potencia involucrada en este proceso ideal es:

$$P_{\text{ideal}} = T (V_z + v_i) = k \rho S v_i (V_z + v_i) \sqrt{V_x^2 + (V_z + v_i)^2} \quad (10.4)$$

La potencia anterior produce un incremento de la energía cinética del aire afectado.

$$P_{\text{ideal}} = \frac{1}{2} \dot{m} [V_2^2 - V_0^2] = \frac{1}{2} \dot{m} [V_x^2 + (V_z + k v_i)^2 - (V_x^2 + V_z^2)] \quad (10.5)$$

$$P_{\text{ideal}} = \frac{1}{2} \dot{m} k v_i (2 V_z + k v_i) = T \left( V_z + \frac{1}{2} k v_i \right) \quad (10.6)$$

Igualando las dos potencias anteriores (expresiones (10.4) y (10.6)) se obtiene el valor de  $k$ .

$$T(V_z + v_i) = T\left(V_z + \frac{1}{2}kv_i\right) \quad (10.7)$$

Se deduce que  $k = 2$ . Es decir, la velocidad inducida en el infinito aguas abajo es el doble de la velocidad inducida en la zona del rotor.

Sustituyendo el valor de  $k$  en las expresiones de la tracción y la potencia ideal se obtiene:

$$T = 2\rho S v_i \sqrt{V_x^2 + (V_z + v_i)^2} \quad (10.8)$$

$$P_{ideal} = 2\rho S v_i (V_z + v_i) \sqrt{V_x^2 + (V_z + v_i)^2} \quad (10.9)$$

## A.2 Teoría del elemento de pala

La teoría del elemento de pala toma para su estudio un ala de envergadura diferencial en régimen bidimensional de corriente, de tal forma que las fuerzas aerodinámicas dependerán de la velocidad relativa de su punto de referencia respecto al aire.

Esta velocidad se calcula teniendo en cuenta las libertades de movimiento que le permiten sus articulaciones de batimiento, arrastre y giro azimutal. La Figura 10.2 muestra el caso general.

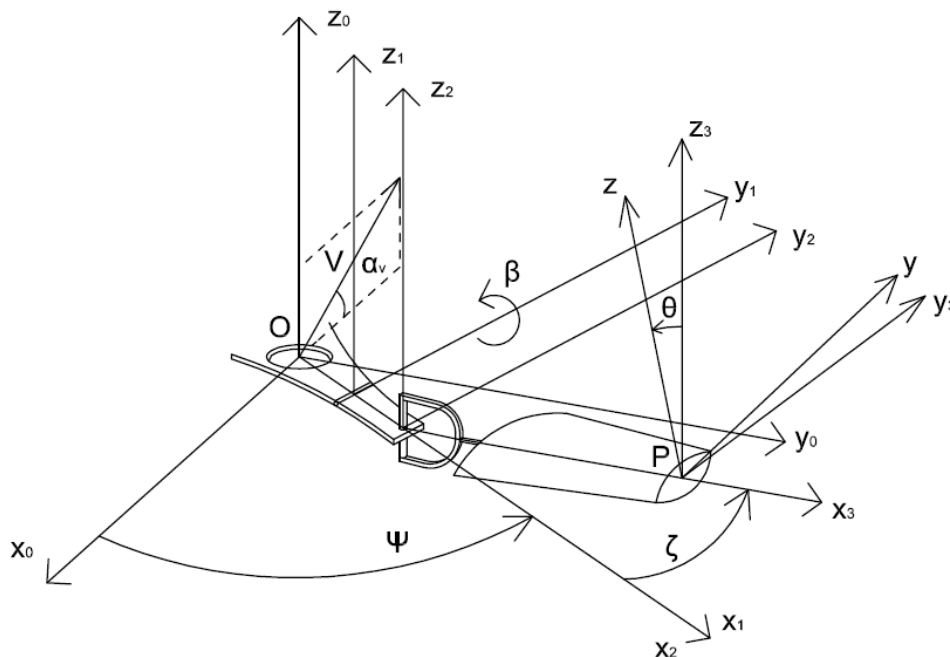


Figura 10.2

No obstante, en este proyecto se ha implementado un modelo de pala en el cual no se permiten los movimientos de arrastre y batimiento, simplificándose así el cálculo de la velocidad relativa de P. Haciendo estas consideraciones, se tiene:

$$\overline{V_P} = \overline{V_O} + \dot{\psi} \wedge \overline{OP} \quad (10.10)$$

Evaluamos los dos sumandos:

$$\overline{V_O} = \begin{pmatrix} V_x \\ 0 \\ V_z + v_i \end{pmatrix}_{X_0 Y_0 Z_0} = \begin{pmatrix} -V \cos \alpha_V \\ 0 \\ -V \sin \alpha_V + v_i \end{pmatrix}_{X_0 Y_0 Z_0} \quad (10.11)$$

$$\dot{\psi} \wedge \overline{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\psi} r \\ 0 \end{pmatrix}_{X_3 Y_3 Z_3} \quad (10.12)$$

La expresión anterior muestra una velocidad tangencial, donde  $r$  es la distancia que hay entre los puntos O y P. Para el caso de rotor sin movimientos de arrastre y batimiento  $r$  es una distancia radial.

El primero de los sumandos es fácilmente expresable en la base  $X_0 Y_0 Z_0$ . Esta no es una base fija asociada al rotor. Es una base que se orienta en función del vector velocidad, de manera que este se pueda expresar en esta base a partir de la expresión (10.11). El segundo sumando se expresa cómodamente en la base  $X_3 Y_3 Z_3$ . Se trata de una base móvil asociada a la pala que gira.

A continuación, se expresa la velocidad relativa de P en la base móvil:

$$\overline{V_P} = \begin{pmatrix} -V \cos \alpha_V \cos \psi \\ V \cos \alpha_V \sin \psi \\ -V \sin \alpha_V + v_i \end{pmatrix}_{X_3 Y_3 Z_3} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\psi} r \\ 0 \end{pmatrix}_{X_3 Y_3 Z_3} = \begin{pmatrix} -V \cos \alpha_V \cos \psi \\ V \cos \alpha_V \sin \psi + \dot{\psi} r \\ -V \sin \alpha_V + v_i \end{pmatrix}_{X_3 Y_3 Z_3} \quad (10.13)$$

La expresión anterior también se puede escribir de la siguiente forma:

$$\overline{V_P} = \begin{pmatrix} U_R \\ U_T \\ U_P \end{pmatrix}_{X_3 Y_3 Z_3} \quad (10.14)$$

Es habitual expresar la velocidad relativa de P de manera adimensional, dividiéndola por el término siguiente:

$$\dot{\psi} R = \Omega R \quad (10.15)$$

Se definen también la distancia radial adimensional, dividiendo la variable  $r$  por el radio de pala  $R$ :

$$x = \frac{r}{R} \quad (10.16)$$

Entonces, teniendo en cuenta (10.15) y (10.16) se tiene las siguientes expresiones:

$$\frac{U_R}{\Omega R} = \frac{-V \cos \alpha_v}{\Omega R} \cos \psi = -\mu \cos \psi \quad (10.17)$$

$$\frac{U_T}{\Omega R} = \frac{V \cos \alpha_v}{\Omega R} \sin \psi + x = \mu \sin \psi + x \quad (10.18)$$

$$\frac{U_P}{\Omega R} = \frac{-V \sin \alpha_v + v_i}{\Omega R} = \lambda \quad (10.19)$$

Una vez calculada la velocidad relativa de un elemento de pala respecto al aire la teoría del elemento de pala establece lo siguiente. La resultante  $dR$  de las fuerzas aerodinámicas sobre el elemento de pala se descompone en la sustentación  $dL$ , normal a la corriente relativa incidente, y la resistencia  $dD$  paralela a ella, dadas por:

$$dL = \frac{1}{2} \rho (U_T^2 + U_P^2) c_l c dr \quad (10.20)$$

$$dD = \frac{1}{2} \rho (U_T^2 + U_P^2) c_d c dr \quad (10.21)$$

donde  $c_l$  y  $c_d$  son los coeficientes de sustentación y resistencia del perfil correspondientes al ángulo de ataque  $\alpha$  de la sección transversal situada a una distancia  $r$  desde el origen de la pala.

Al proyectar esta fuerza se obtiene:

$$dT = \cos \varphi dL - \sin \varphi dD \quad (10.22)$$

$$dF_T = \cos \varphi dD + \sin \varphi dL = dF_{T0} + dF_{Ti} \quad (10.23)$$

En la expresión (10.23),  $dF_{T0}$  se conoce como la fuerza tangencial parásita, debida a la fuerza de resistencia aerodinámica del perfil, mientras que  $dF_{Ti}$  es la fuerza tangencial inducida.

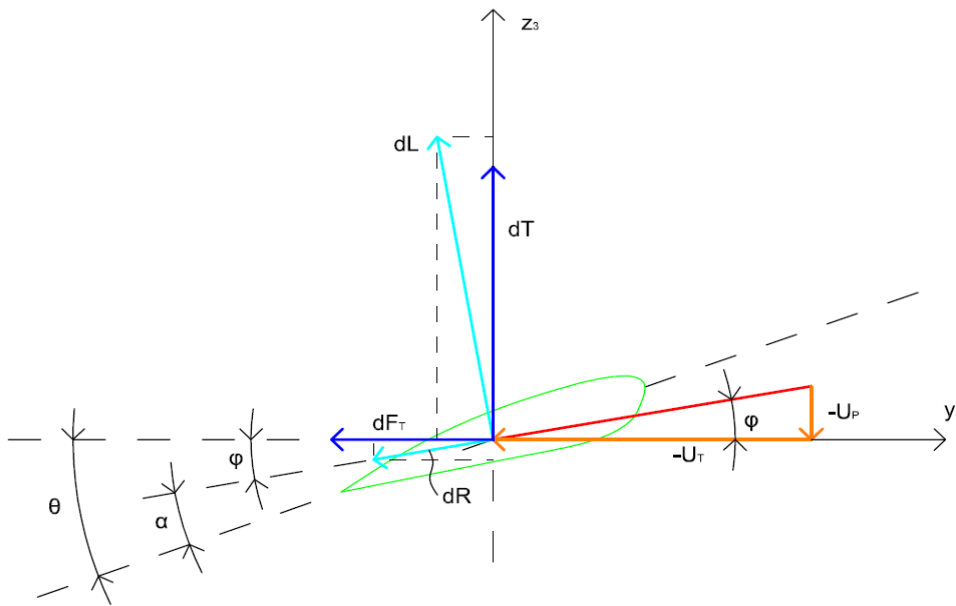


Figura 10.3

Estas fuerzas tangenciales producen unos momentos.

$$dQ_0 = r dF_{T0} = r \cos \varphi dD \quad (10.24)$$

$$dQ_i = r dF_{Ti} = r \sin \varphi dL \quad (10.25)$$

En las fórmulas anteriores,  $\varphi$  es el ángulo de entrada de la corriente.

$$\varphi = \arctg \frac{U_P}{U_T} \quad (10.26)$$

Se toma la hipótesis de pequeños ángulos de entrada de corriente, de manera que se puedan tomar las siguientes simplificaciones:

$$\cos \varphi \approx 1 \quad (10.27)$$

$$\sin \varphi \approx \tg \varphi \approx \varphi \approx \frac{U_P}{U_T} \quad (10.28)$$

$$U_T^2 + U_P^2 \approx U_T^2 \quad (10.29)$$

Para perfiles aerodinámicos en ángulos de ataque pequeños se tiene:

$$dD \ll dL \quad (10.30)$$

La expresión (10.22) queda:

$$dT \simeq dL \simeq \frac{1}{2} \rho U_T^2 c_l c dr \quad (10.31)$$

Las fuerzas tangenciales también se simplifican:

$$dF_{T0} \simeq dD \simeq \frac{1}{2} \rho U_T^2 c_d c dr \quad (10.32)$$

$$dF_{Ti} \simeq \varphi dL \simeq \frac{1}{2} \rho U_P U_T c_l c dr \quad (10.33)$$

Los momentos que producen las fuerzas tangenciales quedan:

$$dQ_0 \simeq \frac{1}{2} \rho U_T^2 c_d c r dr \quad (10.34)$$

$$dQ_i \simeq \frac{1}{2} \rho U_P U_T c_l c r dr \quad (10.35)$$

Se definen a continuación el parámetro  $\sigma$ , solidez:

$$\sigma = \frac{b c}{\pi R} \quad (10.36)$$

Se definen también la tracción y el par de referencia:

$$T_u = \rho (\pi R^2) (\Omega R)^2 \quad (10.37)$$

$$Q_u = \rho (\pi R^2) R (\Omega R)^2 \quad (10.38)$$

Entonces, definiendo las expresiones diferenciales de empuje y par a partir de (10.37) y (10.38) respectivamente y haciendo uso de unos coeficientes adimensionales de tracción ( $dC_T$ ) y de par ( $dC_{Q0}$  y  $dC_{Qi}$ ), se tiene:

$$dT = dC_T T_u \quad (10.39)$$

$$dQ_0 = dC_{Q0} Q_u \quad (10.40)$$

$$dQ_i = dC_{Qi} Q_u \quad (10.41)$$

Sustituyendo en las expresiones anteriores los valores de fuerza y par dados por (10.31), (10.34) y (10.35), junto con los de referencia dados por (10.37) y (10.38) se obtienen los



valores de los coeficientes de tracción y par adimensionales.

$$dC_T = \frac{\sigma c_l}{2} \left( \frac{U_T}{\Omega R} \right)^2 dx \quad (10.42)$$

$$dC_{Q0} = \frac{\sigma c_d}{2} \left( \frac{U_T}{\Omega R} \right)^2 x dx \quad (10.43)$$

$$dC_{Qi} = \frac{\sigma c_l}{2} \left( \frac{U_P}{\Omega R} \right) \left( \frac{U_T}{\Omega R} \right) x dx \quad (10.44)$$

Los coeficientes adimensionales definidos anteriormente son función de las velocidades  $U_P$  y  $U_T$ . Los dos regímenes de vuelo estudiados, axial y de avance, tienen diferentes expresiones de estas velocidades, dando lugar a diferentes expresiones de los coeficientes adimensionales de empuje y par.

Para el vuelo axial, y tomando en la expresión (10.18)  $\mu = 0$  (ya que el ángulo que forma la velocidad del rotor con el plano del rotor es  $90^\circ$ ) resulta:

$$\left( \frac{U_T}{\Omega R} \right) = x \quad (10.45)$$

$$\left( \frac{U_P}{\Omega R} \right) = \frac{V_z + v_i}{\Omega R} = \lambda \quad (10.46)$$

Entonces, las expresiones (10.42), (10.43) y (10.44) quedan:

$$dC_T = \frac{\sigma c_l}{2} x^2 dx \quad (10.47)$$

$$dC_{Q0} = \frac{\sigma c_d}{2} x^3 dx \quad (10.48)$$

$$dC_{Qi} = \frac{\sigma c_l}{2} \lambda x^2 dx \quad (10.49)$$

Para el vuelo de avance  $U_P$  y  $U_T$  toman la forma dada por las expresiones (10.18) y (10.19).

Este es el punto de partida del análisis de vuelo axial y vuelo de avance que se lleva a cabo en los apartados 4.2.3 y 4.2.4

Por otro lado, también es necesario analizar cómo se lleva a cabo el cálculo de la fuerza aerodinámica de arrastre  $\mathbf{H}$  en los ejes de la base  $\mathbf{X}_0 \mathbf{Y}_0 \mathbf{Z}_0$ . Esta fuerza diferencial se calcula de la siguiente forma:

$$d\mathbf{H} = \sin \psi d\mathbf{F}_{T0} + \sin \psi d\mathbf{F}_{Ti} \approx \sin \psi d\mathbf{D} + \sin \psi \varphi d\mathbf{L} \quad (10.50)$$

La fuerza anterior actúa en el eje  $\mathbf{X}_0$ , tal y como puede deducirse de la Figura 10.4. De la expresión (10.50) se deduce fácilmente que para el vuelo axial no se genera fuerza de arrastre en el rotor.

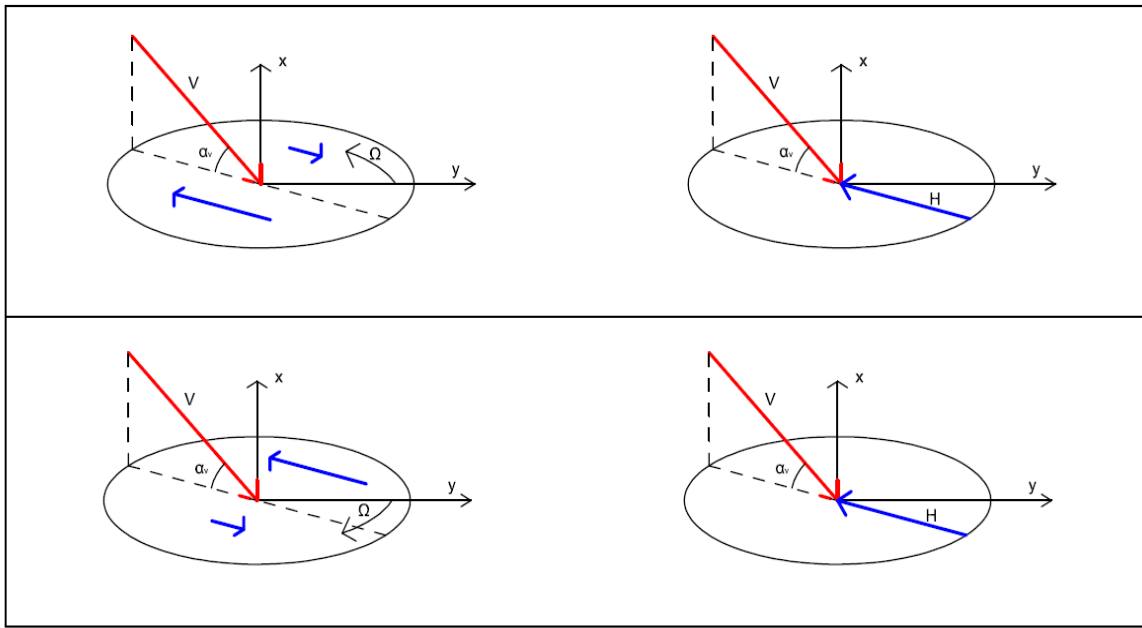


Figura 10.4

Si se aproxima el valor de  $\varphi$  a partir de (10.28), la expresión (10.50) se puede escribir también de la siguiente forma:

$$d\mathbf{H} \approx \sin \psi d\mathbf{D} + \sin \psi \left( \frac{-V \sin \alpha_v + v_i}{V \cos \alpha_v \sin \psi + \Omega R x} \right) d\mathbf{L} \quad (10.51)$$

Por otro lado, la expresión del momento diferencial en el eje  $\mathbf{X}_0$  se calcula de la siguiente forma:

$$d\mathbf{M} = r \sin \psi d\mathbf{T} \quad (10.52)$$

Se deduce también que no existe momento  $\mathbf{M}$  para el caso de vuelo axial.

La fuerza y el momento diferencial anteriores deben integrarse a lo largo de la envergadura de la pala y para cada ángulo azimutal que recorre la pala. Por tanto el elemento diferencial de área para la integración es  $r dr d\psi$ .

## ANEXO B: Cálculo de momentos de inercia

El momento de inercia describe el comportamiento dinámico de un cuerpo que rota en torno a un eje.

Se define de la siguiente manera:

$$I = \int \int \int_V \rho r^2 dV \quad (10.53)$$

En la expresión (10.53)  $I$  [Kg m<sup>2</sup>] es el momento de inercia,  $V$  [m<sup>3</sup>] es el volumen ocupado por el cuerpo,  $\rho$  [Kg/m<sup>3</sup>] es la función densidad y  $r$  [m] es la distancia perpendicular del punto considerado al eje de rotación.

Para un cuerpo, diferentes ejes de rotación pueden tener diferentes momentos de inercia en torno a dichos ejes. Se define entonces el tensor de inercia<sup>41</sup>.

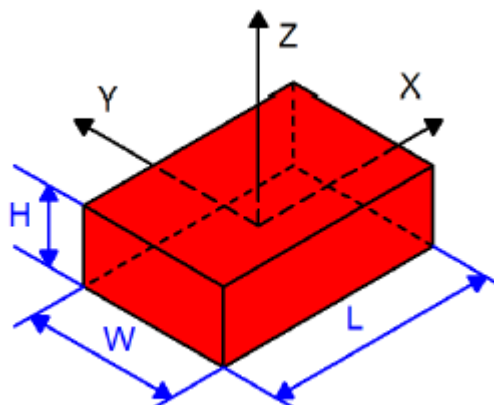
$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (10.54)$$

En la expresión (10.54)  $I_{xx}$  denota el momento de inercia en torno al eje  $x$  cuando el cuerpo es rotado en torno al eje  $x$ .  $I_{xy}$  denota el momento de inercia en torno al eje  $y$  cuando el cuerpo es rotado en torno al eje  $x$ . El resto de elementos se interpretan de la misma forma. Los términos que no pertenecen a la diagonal principal se llaman productos de inercia.

Se calcula a continuación los momentos de inercia de algunas geometrías que son empleadas en la modelización del quadrotor.

- Prisma rectangular de longitud  $L$ , anchura  $W$ , espesor  $H$  y masa  $M$

La Figura 10.5 muestra la geometría y la disposición de los ejes del sólido.



**Figura 10.5**

<sup>41</sup> El tensor de inercia se ha llamado matriz de inercia durante el desarrollo del proyecto.

La densidad, supuesta uniforme, es la siguiente:

$$\rho = \frac{M}{LWH} \quad (10.55)$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_z \int_y \int_x \rho (y^2 + z^2) dx dy dz = \rho \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (y^2 + z^2) dx dy dz = \\ &= \left( LH \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} y^2 dy + LW \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z^2 dz \right) = \frac{M}{LWH} \left( LH \frac{W^3}{12} + LW \frac{H^3}{12} \right) = M \left( \frac{W^2}{12} + \frac{H^2}{12} \right) \end{aligned} \quad (10.56)$$

$$I_{yy} = \int_z \int_y \int_x \rho (x^2 + z^2) dx dy dz = \rho \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (x^2 + z^2) dx dy dz = \dots = M \left( \frac{L^2}{12} + \frac{H^2}{12} \right) \quad (10.57)$$

$$I_{zz} = \int_z \int_y \int_x \rho (x^2 + y^2) dx dy dz = \rho \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (x^2 + y^2) dx dy dz = \dots = M \left( \frac{L^2}{12} + \frac{W^2}{12} \right) \quad (10.58)$$

- Cilindro sólido de radio **R**, altura **H** y masa **M** (densidad uniforme)

La Figura 10.6 muestra la geometría y la disposición de los ejes del sólido.

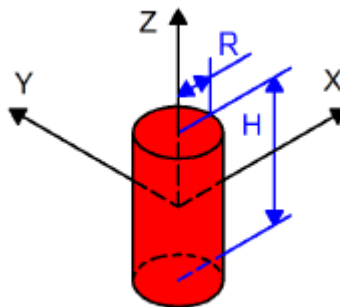


Figura 10.6

La densidad es la siguiente:

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2 H} \quad (10.59)$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \int_z \int_y \int_x \rho (y^2 + z^2) dx dy dz = \rho \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} \int_{-\sqrt{(\frac{R}{2})^2 - y^2}}^{\sqrt{(\frac{R}{2})^2 - y^2}} (y^2 + z^2) dx dy dz = \\
 &= \rho \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R (r^2 \sin^2 \theta + z^2) r dr d\theta dz = \rho \left( H \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta + 2\pi \int_0^R r dr \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z^2 dz \right) = \\
 &= \frac{M}{\pi R^2 H} \left( H \frac{R^4}{4} \pi + 2\pi \frac{R^2}{2} \frac{H^3}{12} \right) = M \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right)
 \end{aligned}$$

(10.60)

$$\begin{aligned}
 I_{yy} &= \int_z \int_y \int_x \rho (x^2 + z^2) dx dy dz = \dots = \rho \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R (r^2 \cos^2 \theta + z^2) r dr d\theta dz = \\
 &= \dots = M \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right)
 \end{aligned}$$

(10.61)

$$\begin{aligned}
 I_{zz} &= \int_z \int_y \int_x \rho (x^2 + y^2) dx dy dz = \dots = \rho \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta dz = \\
 &= \dots = M \frac{R^2}{2}
 \end{aligned}$$

(10.62)

- Cilindro sólido de radio **R**, altura **H** y masa **M** (densidad variable)

Para este análisis se utiliza como referencia la Figura 10.6. Se supone que la densidad varía con el radio, disminuyendo a medida que uno se aleja del origen.

$$\rho = \frac{M}{2\pi R H r} \quad (10.63)$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \int_z \int_y \int_x \rho (y^2 + z^2) dx dy dz = \frac{M}{2\pi R H} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} \int_{-\sqrt{(\frac{R}{2})^2 - y^2}}^{\sqrt{(\frac{R}{2})^2 - y^2}} \frac{1}{r} (y^2 + z^2) dx dy dz = \\
&= \frac{M}{2\pi R H} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r} (r^2 \sin^2 \theta + z^2) r dr d\theta dz = \frac{M}{2\pi R H} \left( H \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta + 2\pi R \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z^2 dz \right) = \\
&= \frac{M}{2\pi R H} \left( H \frac{R^3}{3} \pi + 2\pi R \frac{H^3}{12} \right) = M \left( \frac{R^2}{6} + \frac{H^2}{12} \right)
\end{aligned}$$

(10.64)

$$\begin{aligned}
I_{yy} &= \int_z \int_y \int_x \rho (x^2 + z^2) dx dy dz = \dots = \frac{M}{2\pi R H} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r} (r^2 \cos^2 \theta + z^2) r dr d\theta dz = \\
&= \dots = M \left( \frac{R^2}{6} + \frac{H^2}{12} \right)
\end{aligned}$$

(10.65)

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \int_z \int_y \int_x \rho (x^2 + y^2) dx dy dz = \dots = \frac{M}{2\pi R H} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r} (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta dz = \\
&= \dots = M \frac{R^2}{3}
\end{aligned}$$

(10.66)

Si el centro de gravedad del cuerpo en cuestión no coincide con el origen de los ejes, el teorema de los ejes paralelos de Steiner permite determinar los momentos de inercia sin recalcularse las integrales. El teorema establece que el momento de inercia con respecto a cualquier eje paralelo a un eje que pasa por el centro de gravedad, es igual al momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centro de gravedad más el producto de la masa por el cuadrado de la distancia **D** entre los dos ejes:

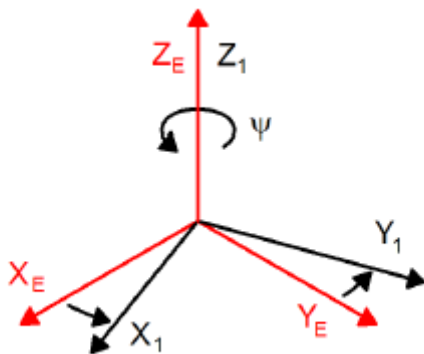
$$I_{\text{desplazado}} = I_{\text{cg}} + MD^2 \quad (10.67)$$

## ANEXO C: Matriz de cambio de base y modelo dinámico

En este Anexo se determina detalladamente la matriz de cambio de base  $\mathbf{M}^b_e$  de la base asociada al quadrotor  $\mathbf{x}_b$   $\mathbf{y}_b$   $\mathbf{z}_b$  a la base asociada a la tierra  $\mathbf{x}_e$   $\mathbf{y}_e$   $\mathbf{z}_e$ .

Esta matriz se obtiene multiplicando las tres matrices básicas de rotación que se presentan a continuación:

- Rotación en torno al eje  $\mathbf{z}_e$ . Ángulo de yaw o guiñada ( $\psi$ )

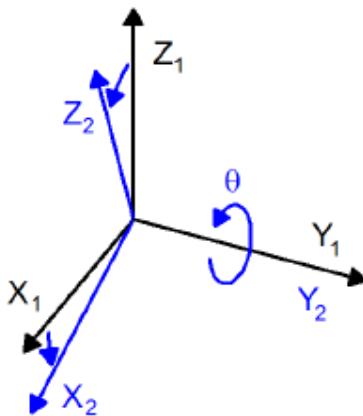


$$\mathbf{M}(\psi, z) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(10.68)

Figura 10.7

- Rotación en torno a  $\mathbf{y}_1$ . Ángulo de pitch o cabeceo ( $\theta$ )



$$\mathbf{M}(\theta, y) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

(10.69)

Figura 10.8

- Rotación en torno a  $x_2$ . Ángulo de roll o balanceo ( $\Phi$ )

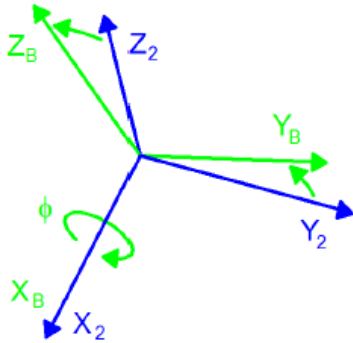


Figura 10.9

$$\mathbf{M}(\phi, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (10.70)$$

La matriz de rotación es entonces:

$$\mathbf{M}_e^b = \mathbf{M}(\psi, \mathbf{z}) \mathbf{M}(\theta, \mathbf{y}) \mathbf{M}(\phi, \mathbf{x}) \quad (10.71)$$

Haciendo las operaciones matemáticas, se obtiene:

$$\mathbf{M}_e^b = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (10.72)$$

Se deducen a continuación las ecuaciones del modelo dinámico en la base asociada al quadrotor. Se trata de una base móvil, a diferencia de la base de la tierra, que constituye un sistema de referencia inercial.

Se tomará la siguiente notación:

- Masa total del quadrotor  $\mathbf{m}_{\text{total}}$ .
- Matriz de inercia del quadrotor  $\mathbf{I}_{\text{total}}$ .
- Vector de aceleración lineal del quadrotor en la base del quadrotor  $\mathbf{A}_b$ .
- Vector de aceleración lineal del quadrotor en la base de la tierra  $\mathbf{A}_e$ .
- Vector de aceleración angular del quadrotor en la base del quadrotor  $\alpha_b$ .
- Vector de aceleración angular del quadrotor en la base de la tierra  $\alpha_e$ .
- Vector de velocidad lineal del quadrotor en la base del quadrotor  $\mathbf{V}_b$ .
- Vector de velocidad lineal del quadrotor en la base de la tierra  $\mathbf{V}_e$ .
- Vector de velocidad angular del quadrotor en la base del quadrotor  $\omega_b$ .
- Vector de velocidad angular del quadrotor en la base de la tierra  $\omega_e$ .
- Vector de fuerzas actuantes sobre el quadrotor en la base del quadrotor  $\mathbf{F}_b$ .
- Vector de fuerzas actuantes sobre el quadrotor en la base de la tierra  $\mathbf{F}_e$ .
- Vector de momentos actuantes sobre el quadrotor en la base del quadrotor  $\mathbf{M}_b$ .
- Vector de momentos actuantes sobre el quadrotor en la base de la tierra  $\mathbf{M}_e$ .



Se parte de la segunda ley de Newton aplicada en la base de la tierra, es decir, en un sistema de referencia inercial, para las fuerzas:

$$\mathbf{F}_e = m_{\text{total}} \mathbf{A}_e \quad (10.73)$$

$$\mathbf{F}_e = m_{\text{total}} \frac{d\mathbf{V}_e}{dt} \quad (10.74)$$

$$\mathbf{M}_e^b \mathbf{F}_b = m_{\text{total}} \frac{d(\mathbf{M}_e^b \mathbf{V}_b)}{dt} \quad (10.75)$$

$$\mathbf{M}_e^b \mathbf{F}_b = m_{\text{total}} \left( \mathbf{M}_e^b \mathbf{A}_b + \frac{d\mathbf{M}_e^b}{dt} \mathbf{V}_b \right) \quad (10.76)$$

$$\mathbf{M}_e^b \mathbf{F}_b = m_{\text{total}} \mathbf{M}_e^b (\mathbf{A}_b + \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{V}_b) \quad (10.77)$$

$$\mathbf{F}_b = m_{\text{total}} (\mathbf{A}_b + \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{V}_b) \quad (10.78)$$

El análisis para los momentos es análogo:

$$\mathbf{M}_e = I_{\text{total}} \boldsymbol{\alpha}_e \quad (10.79)$$

$$\mathbf{M}_e = I_{\text{total}} \frac{d\boldsymbol{\omega}_e}{dt} \quad (10.80)$$

$$\mathbf{M}_e^b \mathbf{M}_b = I_{\text{total}} \frac{d(\mathbf{M}_e^b \boldsymbol{\omega}_b)}{dt} \quad (10.81)$$

$$\mathbf{M}_e^b \mathbf{M}_b = I_{\text{total}} \left( \mathbf{M}_e^b \boldsymbol{\alpha}_b + \frac{d\mathbf{M}_e^b}{dt} \boldsymbol{\omega}_b \right) \quad (10.82)$$

$$\mathbf{M}_e^b \mathbf{M}_b = \mathbf{M}_e^b (I_{\text{total}} \boldsymbol{\alpha}_b + \boldsymbol{\omega}_b \times (I_{\text{total}} \boldsymbol{\omega}_b)) \quad (10.83)$$

$$\mathbf{M}_b = I_{\text{total}} \boldsymbol{\alpha}_b + \boldsymbol{\omega}_b \times (I_{\text{total}} \boldsymbol{\omega}_b) \quad (10.84)$$

Estas son las ecuaciones que se toman de partida en el apartado 4.4, relativo al modelo dinámico del quadrotor.

